

CONCOURS D'ENTREE EN 1^{ère} ANNÉE IUT
Session de Septembre 2014

Filière PFTIN
Épreuve de Mathématiques
Durée 3 heures



Exercice 1 : (4 points)

On considère deux nombres complexes $Z_1 = 2 + 2i$ et $Z_2 = 1 - i\sqrt{3}$,

1. Déterminer le module et argument de chacun de ces nombres,
2. Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on note A le point d'affixe Z_1 et B le point d'affixe Z_2
 - a) Faire un graphique et vérifier les valeurs pour les modules et arguments trouvés.
 - b) la rotation r de centre 0 et d'angle $\frac{5\pi}{6}$ (en radians) transforme le point A en un point C. Montrer que l'affixe Z_3 du point C est donnée par :
 $Z_3 = -(1 + \sqrt{3}) + i(1 - \sqrt{3})$
 - c) Montrer que le quotient $\frac{Z_3 - Z_2}{Z_1 - Z_2}$ est imaginaire pure. Calculer le module et un argument de ce quotient. Interpréter géométriquement ces résultats et indiquer les particularités du triangle ABC.

Exercice 2 : (4 points)

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère du orthonormé direct de l'espace E. On considère les points A, B, C de coordonnées : A(1;0;0) ; B(1;-1;1) ; C(-2;0;1).

1. Déterminer le barycentre G des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 2, -2 et 1.
2. On associe à tout point M de l'espace le vecteur $\vec{V}_M$ défini par ; $\vec{V}_M = 2\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}$
Exprimer le vecteur $\vec{V}_M$ en fonction de $\vec{MG}$
3. Le point M a pour coordonnées (x; y; z)
 - a) Déterminer le produit vectoriel $\vec{AB} \wedge \vec{V}_M$
 - b) Le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{V}_M$
4. Déterminer le point M vérifiant simultanément $\vec{AB} \wedge \vec{V}_M = 0$ et $\vec{AB} \cdot \vec{V}_M = 0$

Exercice 3 : (4 points)

On considère la fonction f de la variable réelle x , définie sur $[0, \pi]$ par :

$$y = f(x) = ((\cos x)^3 - (3 \cos x))/2$$

1. a) Montrer que la dérivée première, f' est définie par :

$$f'(x) = 3 \sin x (1 - (\cos x)^2) / 2.$$
 Etudier le signe de f' .
 b) Déterminer le sens de variation de f .
2. Soit (C) la courbe représentative de f relativement à un repère orthonormé d'axes (Ox) et (Oy).
 - a) Déterminer le point A commun à la courbe (C) et à l'axe ($x'Ox$) et construire la tangente en A à (C).
 - b) Montrer que A est centre de symétrie pour (C).
 - c) Construire (C).
3. a) En utilisant les formules de Moivre, exprimer $(\cos x)^3$ sous la forme :
 $a \cos 3x + b \cos x$, a et b étant des nombres réels à déterminer.
 b) Calculer l'aire de la région limitée par la courbe de (C), l'axe ($x'Ox$) et les droites respectives $x = 0$ et $x = \pi/2$

Exercice 4 : (4 points)

L'entier naturel non nul p étant fixé, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n 1/k(k+1) \cdots (k+p), \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

1. Calculer pour $p = 2, S_1, S_2$ et S_3 . En déduire que la suite (S_n) est strictement croissante.
2. Démontrer que l'on a pour tout $(n \in \mathbb{N}^*)$

$$S_n = \frac{1}{p} \left[\frac{1}{p!} - \frac{1}{(n+1) + \cdots + (n+p)} \right] = \frac{1}{p} \left[\frac{1}{p!} - \frac{n!}{(n+p)!} \right]$$
3. En déduire la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 5 : (4 points)

Un dé cubique D_1 comprend une face marquée 1, deux faces marquées 2, deux faces marquées 3 et une face marquée 4.

Un dé cubique D_2 comprend deux faces marquées 1, une face marquée 2 et trois faces marquées 3.

On suppose que, pour chaque dé, toutes les faces ont la même probabilité d'être obtenue.

On lance simultanément les deux. Soient x le chiffre indiqué par le dé D_1 et y le chiffre indiqué par le dé D_2

1. Calculer la probabilité pour que l'on ait $x = y$.
2. Calculer la probabilité pour que l'on ait $x > y$.
3. Calculer la probabilité pour que l'on ait $|x - y| \geq 1$.