CONCOURS D'ENTREE EN* $1^{ère}$ *ANNÉE

Session de juillet 2010

Filière PFTIN / GI
Épreuve de Mathématiques
Durée 3 heures

Exercice 1

Soit

$$A = \cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 6\alpha + \cos 8\alpha$$
$$B = \sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \sin 6\alpha + \sin 8\alpha \text{ avec } \alpha = \frac{\pi}{5}$$

1. *Montrer que* $1 + A = 4\cos^2\alpha - 2\cos\alpha - 1$
2. *Calculer la valeur du nombre complexe* $Z = A + iB$
3. *En déduire que* $1 + A = 0$
4. *Calculer les valeurs réelles de* $\cos\alpha$ *et* $\sin\alpha$

Exercice 2 :

Soit $f(x) = \ln(|\frac{\cos x}{\sin x}|)$ *une fonction réelle d'une variable réelle* x

1. *Determiner le domaine de définition de cette fonction.*
2. *Dresser le tableau de variation de cette fonction dans l'intervalle* $]0, \frac{\pi}{2}[$
3. *Montrer que dans l'intervalle* $]0, \frac{\pi}{2}[$ *la courbe de* f *admet un point d'inflexion*
4. *Montrer que cette fonction est paire et tracer sa courbe representative dans l'intervalle* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
5. *Montrer que cette fonction est périodique et tracer sa courbe dans l'intervalle* $]-\pi, \pi[$

Exercice 3 :

Soit $I_n = \int_1^e x^n \ln x\, dx$ *ou* n *est un entier naturel.*

1. *Calculer* I_0 *et* I_1.
2. *Calculer* I_n.
3. *Calculer la limite de* I_n *quand* n *tend vers* $+\infty$.

Exercice 4 :

Soient $a \in [\lambda, \alpha]$ *un nombre complexe donnée,*λ *et* α *étant des réels.*
On considère l'application S du plan complexe définie ci-apres :

$$S : M(Z) \mapsto M'(Z' = aZ)$$

Ou Z *est un nombre complexe,*M *est un point du plan d'affixe* Z *et ayant pour image le point* M' *du plan d'affixe* Z'.

1. *Soient $M_1(1,0)$,$M_2(0,1)$ et $M_3(0,-1)$ trois points du plan*

a Déterminer la nature du triangle formé par M_1,M_2 et M_3.

b Déterminer ,en fonction de λ et les affixes Z_1', Z_2' et Z_3' des images pas S de M_1, M_2, et M_3 respectivement.

2. *On considère λ =1 et $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$*

a Exprimer Z_1', Z_2' et Z_3'

b Déterminer la nature du triangle formé par les points M_1', M_2' et M_3'

3. *On considère la suite des points du plan M_0, M_1 ,$\cdots$, M_n définie par $M_n = S(M_{n-1})$ ou M_n est le point d'affixe $Z_n = [\rho_n,\theta_n]$ et n un entier naturel. Montrer que la suite (ρ_n) est géométrique et que la suite (θ_n) est arithmétique.*