

**Épreuve de Mathématiques.**  
Session de juillet 2011

Filière PFTIN / GI  
Épreuve de Mathématiques  
Durée 3 heures



**Exercice 1**

1. Soit  $f$  une fonction réelle d'une variable réelle définie par :

$$f(x) = e^{2x} - 4e^x + 3$$

- a Déterminer le domaine de définition de  $f$  et calculer ses limites.
- b Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- c Résoudre l'équation  $f(x) = 0$ .
- d En déduire le signe de  $f$ .

2. Soit  $g$  une fonction réelle d'une variable réelle définie par :

$$g(x) = \ln(e^{2x} - 4e^x + 3)$$

- a Déterminer le domaine de définition de  $g$  et calculer ses limites.
- b Dresser le tableau de variation de  $g$ .
- c Montrer que  $g(x)$  se met sous la forme  $g(x) = 2x + h(x)$  où  $h$  est une fonction qui tend vers 0 quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .
- d Que peut-on en déduire ?
- e Calculer  $g(-1)$  et  $g(2)$  puis tracer soigneusement la courbe de  $g$ .

**Exercice 2**

Soit  $P(z) = 4z^4 + 4(\cos \alpha)\lambda z^2 + \lambda^2$  où  $\lambda = 1 + \cos \alpha$ ,  $\alpha \in [0; \pi]$

- 1. Exprimer  $P(x)$  avec  $x = \frac{2}{\lambda} z^2$
- 2. Déterminer en fonction  $\alpha$ , le module et argument de chacun des nombres complexes  $x_1$  et  $x_2$  qui sont les racines de l'équation  $P(x) = 0$ .
- 3. En déduire en fonction  $\alpha$ , le module et argument de chacun des nombres complexes  $z_1, z_2, z_3$  et  $z_4$  qui sont les racines de l'équation  $P(z) = 0$ .

**Exercice 3**

Soient  $(U_n)$  et  $(V_n)$  deux suites définies par :

$$\begin{cases} U_1 = \frac{2}{3} \text{ et } \forall n \geq 2, 3(n-1)U_n = 2nU_{n-1} \\ \forall n \geq 1, V_n = \frac{U_n}{n} \end{cases}$$

- 1. Montrer que la suite  $(V_n)$  est géométrique et préciser sa raison.

2. Exprimer  $V_n$  et  $U_n$  en fonction de  $n$
3. La suite  $(V_n)$  est-elle convergente ?
4. Calculer la limite de  $\ln U_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .
5. En déduire que la suite  $(U_n)$  est-elle convergente.

**Exercice 4**

1. Sans se servir de la règle de l'hospital

- a Calculer la limite quand  $x$  tend vers

$$\frac{\pi}{2} \text{ de } g(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{\cos^2 x}$$

- b Calculer la limite quand  $x$  tend vers

$$\frac{-\pi}{3} \text{ de } h(x) = \frac{\sin x + \sqrt{3} \cos x}{-\sin(2x) + \sqrt{3} \cos(2x)}$$

2. Calculer les intégrales

$$I = \int_0^\pi x^2 \cos(3x) dx \text{ et } J = \int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \frac{2x}{(\cos x^2)^2} dx$$

3. Démontrer que  $\forall x \in [0; 1],$

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} \leq \frac{1}{n+1}$$