

CONCOURS D'ENTREE EN 1^{ère} ANNÉE
Session de juillet 2007

Filière PFTIN / GI
Épreuve de Mathématiques
Durée 3 heures



exercice 1 : 4 points

1. On considère le nombre complexe z de module ρ et d'argument θ tels que

$$z = \frac{24}{(4 - \alpha)(2 - \alpha i)^2} \text{ ou } \alpha \text{ est un nombre réel}$$

- a) Mettre z sous la forme algébrique. (0.5 pt)
- b) Calculer en fonction de α le module ρ et $\tan \theta$. (1 pt)
- c) Quelles sont les valeurs de α pour lesquelles z est un réel? (0.5 pt)
- d) Quelles sont les valeurs de α pour lesquelles z est imaginaire pur? (0.5 pt)

2. Soit E l'ensemble des nombres complexes z vérifiant : $z\bar{z} - 2(z + \bar{z}) = 0$

- a) Montrer que l'ensemble des points $M(x, y)$ image des nombres complexes z appartenant à un cercle que l'on précisera. (1 pt)
- b) On suppose que $z = [\rho, \theta]$ Déterminer que pour θ donné, la seule valeur de ρ telle que $z \in E$. (0.5 pt)

NB Les questions 1 et 2 sont indépendantes

exercice 2 : 6 points

Soit la fonction $f(x) = \frac{2 \ln x}{1 + \ln x}$ une fonction réelle d'une variable réelle.

- 1. Déterminer le domaine de définition de cette fonction et calculer les limites. (1.5 pt)
- 2. Calculer la dérivée et dresser le tableau de variation. (1 pt)
- 3. Montrer que la courbe f admet un point d'inflexion que l'on précisera. (1 pt)
- 4. Montrer que f est prolongeable en continuité en $x = 0$ et étudier la dérivabilité.. (0.5 pt)
- 5. Résoudre graphiquement les inequations suivantes :
 $f(x) < 0, \quad f(x) > 0$

exercice 3 : 4 points

1. Calculer l'intégrale $I = \int \cos ax \sin b x dx$. (1 pt)
2. Soit $I_n = \int_0^\pi \cos x \sin nx dx$ n étant un entier naturel. Montrer que ,
 $\forall n \neq 1, I_n = \frac{((-1)^n + 1)}{n^2 - 1}$. On rappelle que $\cos n\pi = (-1)^n$. (2 pts)
3. pour $n = 2p$ p étant un entier naturel, calculer I_{2p}
pour $n = 2p + 1$ $p \neq 0$ étant un entier naturel, calculer I_{2p+1}
4. la suite (I_n) est elle convergente? (1 pt)

exercice 4 : 3 points

On considère le triangle équilatéral ABC suivant de coté a dans lequel est inscrit le rectangle EFMN tel que les points E et F appartiennent au segment AC, le point M appartiennent au segment BC et le point N appartiennent au segment AB. La longueur $AE = FC = x$ est variable et on rappelle que le triangle BMN est équilatéral.

figure

figure

figure

figure

1. Calculer l'aire des triangles NBM et ANE en fonction de x et a . (1.5 pt)
2. En déduire l'aire du rectangle EFMN en fonction de x et a . (0.5 pt)
3. Déterminer x pour que l'aire du rectangle EFMN soit maximal et déterminer cet aire. (1 pt)

exercice 5 : 3 points

1. Soient a, b et c trois réels qui vérifient le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} a + b + c = 312 \\ c + a = 192 \end{cases}$$
Déterminer ces réels pour qu'ils soient trois termes consécutifs d'une suite géométrique. (2 pts)
2. Soit x un réel. On considère les nombres réels suivants :

$$U_1 = (x^2 - 2x - 1)^2, U_2 = (x^2 + 1)^2 \text{ et } U_3 = (x^2 + 2x - 1)^2$$

Montrer que U_1, U_2 et U_3 sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique. (1 pt)