CONCOURS D'ENTREE EN $1^{ère}$ ***ANNÉE***

Session de juillet 2006

Filière PFTI / GI
Épreuve de Mathématiques
Durée 3 heures

I. *(**6 points**)*

Soit l'équation $(E) = x^3 - 15x - 4 = 0$

a) *Vérifier graphiquement que* (E) *admet trois racines réelles .* *(**1 pt**)*

b) *Montrer que u et v sont deux nombre réels tels que* $u^4 + v^3 = 4$ *et* $uv = 5$ *alors* $u + v$ *est solution de* (E) *.* *(**2 pts**)*

c) *Montrer* u^3 *et* v^3 *sont solutions de* $x^2 - 4x + 125 = 0$*.Cette équation admet-elle des solutions dans* $\mathbb{R}$ *? Résoudre l'équation dans* $\mathbb{C}$*.* *(**1 pt**)*

d) *Calculer* $(2+i)^2$ *et* $(2-i)^2$ *. En déduire les solutions de* (E)*.* *(**2 pts**)*

II. *(**4 points**)*

Le quart d'un population a été vaccinée contre une maladie contagieuse.Au cours d'une épidémie ,on a constaté qu'il y a parmi les malades un vacciné pour quatre non vaccinés .On sait que de plus qu'au cours de cette épidémie, il y avait un malade parmi les douze vaccinés.Quelle est la probabilité de tomber malade pour un individu non vacciné ? le vaccin est-il efficace ?

III. *(**10 points**)*

Soit la fonction f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 + \frac{1}{x} & si\ x \leq 1 \\ 1 - (\ln(x))^2, & si\ x > 1 \end{cases}$$

i. *Montrer que* f *est continue et derivable en 1.* *(**2 pts**)*

ii. *Calculer les limites aux bornes de son ensemble de définition et préciser les branches infinies de la courbe représentative de* f*.* *(**3 pts**)*

iii. *Étudier les variations de* f*.Démontrer que le point d'abscisse e est un point d'inflection de la courbe représentative de* f*.* *(**4 pts**)*

iv. *Tracer cette courbe dans un plan muni d'un repère ortonormé* $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$*.* *(**1 pt**)*