CONCOURS D'ENTREE EN $1^{ère}$ ***ANNÉE IUT***

Session d'octobre 2011

Filière PFTIN / GI
Épreuve de Mathématiques
Durée 3 heures

Exercice 1

Soit f *une fonction réelle d'une variable réelle* x *définir par* $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$

1. *Déterminer le domaine de définition de* f *et calculer ses limites.*
2. *Calculer la dérivée de* f *et préciser le signe de cette dérivée.*
3. *Dresser le tableau de variation de* f.
4. *Déterminer les tangentes aux points* $x = -1$ *et* $x = 1$
5. *Montrer que* $f(x)$ *se met sous la forme* $f(x) = 2x + g(x)$ *ou* g *est une fonction qui tend vers* 0 *quand* x *tend vers* $+\infty$.
   Que peut on en déduire ?
6. *Tracer soigneusement la courbe de* f.

Exercice 2

Soit $z = x + iy$ *et* $u = a + ib$ *deux nombres complexes donnés.Soient* $M(x, y)$ *le point du plan ayant pour affixe* z *et* $A(a, b)$ *le point du plan ayant pour affixe* u.

1. *On considère le nombre complexe* $V = z^2 + z\overline{z} + i(z - \overline{z}) - 2i$
   a *Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de* V
   b *Déterminer et représenter l'ensemble des points* M *tel que* V *soit réelle*
   c *Déterminer et représenter l'ensemble des points* M *tel que* V *soit imaginaire pur*
2. *Monter que l'ensemble des points* M *qui vérifie l'équation* $(z - u)(\overline{z} - \overline{u}) - 4u\overline{u} = 0$ *est un cercle que l'on précisera.*

Exercice 3

Soit (U_n) *une suite définie par :*$U_0 > 0$ *et* $\forall n \geq 1$, $U_{n+1} = \dfrac{2U_n + 1}{U_n + 2}$ *ou* n *est un entier naturel.*

1. *Calculer* U_1 ,U_2 ,U_3 *et* U_4 *en fonction de* U_0
2. *On considère que* $\forall n \geq 0$ *on a* $U_n = \dfrac{a_n U_0 + (a_n - 1)}{(a_n - 1)U_0 + a_n}$
   a *En déduire les valeurs* a_1, a_2, a_3, *et* a_4
   b *En déduire la relation de recurrence* $a_{n+1} = ka_n - 1$ *entre* a_{n+1} *et* a_n
   c *Calculer la valeur de* a_0.
3. *Soit* (V_n) *la suite définie par :* $\forall n \geq 0$, $V_n = a_n - \dfrac{1}{2}$
   a *Montrer que cette suite est géométrique*

b *Exprimer V_n en fonction de n*

4. *Exprimer U_n en fonction de n.*
5. *En déduire que la suite (U_n) est-elle convergente.*

Exercice 4

1. *On considère le tableau carré des nombres suivants*

a	x	4
b	5	z
c	y	2

a *Déterminer les nombres a, b, c, x, y, et z pour que si l'on effectue la somme des nombres sur une ligne , sur une colonne ou sur une diagonale on obtient toujours le même total.*

b *Préciser ce total.*

2. *Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :* $4e^{2x} + 15e^{-x} = 19$
3. *Résoudre le système suivant :*

$$\begin{cases} 4^x 5^x = 2^{2x+1} \\ \\ 12^x 9^y = 5^{2y+1} \end{cases}$$