



ANNEE 2006-2007
CONCOURS D'ENTREE A L'EAMAU
SESSION DE MAI 2007

FIJERE : Technicien Supérieur en Gestion Urbaine

ÉPREUVE ÉCRITE

Matière : MATHÉMATIQUE

Durée : 2 Heures

Pour cette épreuve, le candidat est autorisé à utiliser une calculatrice scientifique non programmable.

Exercice 1 : (4pts)

Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f(Z) = Z^2 + (2 + 3i)Z^2 + (4 + 4i)Z + 8$.

1. Calculer $f(i)$. (0,5 pt)
2. Déterminer deux nombres complexes a et b vérifiant : $f(Z) = (Z-i)(Z^2 + aZ + b)$ pour tout complexe Z . (0,5 pt)
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(Z) = 0$. (1pt)
4. On désigne par Z_1 la solution ayant une partie imaginaire positive, par Z_2 la solution réelle, par Z_3 l'autre solution. Montrer qu'il existe un nombre complexe q tel que $Z_2 = qZ_1$ et $Z_3 = qZ_2$. (1pt)
5. Soient A_1, A_2, A_3 les points du plan complexe d'affixes respectives Z_1, Z_2, Z_3 . Quelle est la nature du triangle (Z_1, Z_2, Z_3) ? Justifier. (1pt)

Exercice 2 : (4pts)

Soit la suite définie par :

$$U_n = \frac{n^2 - n}{3}$$

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite. (1pt)
2. Donner l'expression de $U_{n+1} - U_n$ en fonction de n . (1pt)
3. Étudier la monotonie de la suite. (1pt)
4. Montrer que pour tout entier n , U_n est un nombre entier. (1pt)



Problème : (12pts)

On utilisera un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$; unité 1 cm

1. Soit la fonction numérique de variable réelle définie par l'expression : $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x+1}$

Déterminer le domaine de définition de f et encadrer les trois réels a, b, c tels que pour tout x du domaine de f on ait $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$. (2pts)

2. Étudier la fonction f (limites, sens de variation, tableau de variation). (2pts)
3. Soit x un réel différent de -1 . On désigne par M le point d'abscisse x sur C , la courbe représentative de la fonction f , et par P le point de même abscisse x sur la droite Δ d'équation $y = x + 1$. Calculer $g(x) = MP^2$. Déterminer le signe et la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$. Interpréter géométriquement les résultats obtenus. (3,5 pt)
4. Montrer que le point d'intersection I des deux asymptotes à la courbe C est centre de symétrie de C . Tracer C . (0,5 pt)
5. Calculer l'aire de la portion de plan limitée par les droites d'équation $x = -1, x = 2, y = x + 1$ et par la courbe C . (2 pts)
6. Soit t un réel strictement supérieur à 1. On appelle $A(t)$ l'aire (qui dépend de t) de la portion de plan limitée par les droites $x = -1, x = t, y = x + 1$ et la courbe C . On appelle g la fonction qui, au réel t , associe l'aire $A(t)$. Déterminer $g(t)$, étudier et tracer sa courbe représentative. (2 pts)
7. Résoudre l'équation $g(t) = 3$. (2 pts)