

---

INSTITUT DE FORMATION ET DE RECHERCHE DÉMOGRAPHIQUES

ÉPREUVE DE PROBABILITÉS - STATISTIQUES

(Concours type B (Avril 2007))

---

**Exercice 1**

On considère  $n$  variable aléatoire  $X_1, X_2, \dots, X_n$  totalement indépendantes et suivant chacune la loi  $B(1, 0)$  (Loi de Bernoulli de paramètre 0). On pose

$$z_n = \sum_{i=1}^n x_i \quad f_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

1. Déterminer la distribution de la variable  $z_n$
2. En déduire la distribution de  $f_n$ . Calculer  $E(f_n)$  et  $Var(f_n)$ .
3. Montrer que  $f_n$  converge en probabilité vers une quantité certaine qu'il faut préciser.
4. quelle est la distribution asymptotique de  $f_n$  ?
5. Montrer que la variable aléatoire  $q_n = 1 - f_n$  converge en probabilité et en loi.

**Exercice 2**

Dans une urne contenant des boules blanches et noires en proportion  $p$  et  $q$  ( $p + q = 1$ ), on procède à des tirages successifs et indépendants.

On appelle  $X$  la variable aléatoire « nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule blanche ».

- a) Déterminer la loi de la variable  $X$ . Calculer l'espérance mathématiques et la variance de la variable  $X$ . Quelle est la fonction génératrice de cette loi ?
- b) On appelle  $Y$  la variable aléatoire « nombre de tirage nécessaire pour obtenir  $r$  boules blanches ». Déduire des résultats de la question a) :
  - i) la loi de la variable  $Y$ .
  - ii) l'espérance mathématiques de la variable  $Y$ ,
  - iii) la variance de la variable  $Y$ .
  - iv) la fonction génératrice de la loi la variable  $Y$ .
- c) Déterminer directement la loi de la variable  $Y$ .

### Exercice 3

Dans un pays donné, la majorité gouvernementale a 244 députés à l'Assemblée Nationale et la minorité dispose de 243 sièges. La probabilité qu'un député de la majorité soit malade le jour d'un scrutin important est  $\frac{1}{244}$  : cette probabilité est de  $\frac{1}{243}$  pour un député de l'opposition. La maladie frappa les députés de façon indépendante. Soient respectivement  $M$  et  $m$  le nombre des malades dans la majorité et dans l'opposition.

1. On étudie d'abord les variables aléatoires  $M$  et  $m$ .
  - (a) Quelle est la loi exacte de  $M$  ? celle de  $m$  ? Indiquer leurs espérances mathématiques et leurs variances respectives.
  - (b) Peut-on remplacer les lois précédentes par des lois approchées d'un maniement plus simple ? Lesquelles ?
2. Indiquer, sans démonstration mais en justifiant votre réponse, la loi suivie par le nombre total de malades :  $T = M + m$ .
3. On s'intéresse maintenant à la différence  $D = M - m$ . Calculer l'espérance mathématique et la variance de cette variable aléatoire.

### Exercice 4

Une usine fabrique deux types d'ampoules A et B pour les feux arrières de motocyclettes en utilisant deux processus techniques de fabrication.

Les ampoules de type A ont une durée moyenne de vie de 3675 heures avec un écart-type de 430 heures et celle de type B une durée moyenne de vie de 4500 heures avec un écart-type de 980 heures.

Le fabricant étranger de motocyclettes qui achète ces ampoules estime que les ampoules dont la durée de vie est inférieure à 3000 heures sont de mauvaise qualité et sont donc inacceptables.

On suppose que la durée de vie de chaque type d'ampoule fabriquées par l'usine est une variable aléatoire normale.

1. Compte tenu de la norme d'acceptabilité fixée par l'acheteur, quel processus de fabrication l'usine a-t-elle intérêt à choisir ?
2. Comment se modifie ce choix si l'acheteur considère désormais comme de mauvaise qualité les ampoules dont la durée de vie est inférieure à 3500 heures ?
3. On sélectionne au hasard et dans les mêmes conditions des ampoules de type A et B.  
Quelle est la probabilité pour que la durée de vie des ampoules de type A soit supérieure à celle des ampoules de type B ?

### Exercice 5

On veut comparer la proportion  $p$  des naissances masculines à celle des naissances féminines grâce à un échantillon de 900 naissances.

1. On veut bâtir un test pour choisir entre les deux hypothèses suivantes :

$$H_0 : p = 0,5 \quad H_1 : p > 0,5$$

Existe-t-il un test UPP au seuil  $\alpha = 0,05$  pour tester  $H_0$  contre  $H_1$  ?

Application numérique : Que doit-on conclure si l'on trouve dans notre échantillon 510 naissances masculines ?

2. On teste maintenant

$$H_0 : p = 0,5 \text{ contre } H_1 : p \neq 0,5$$

existe-t-il un test UPP au seuil  $\alpha = 0,05$  ?

### Exercice 6

On veut estimer la moyenne  $m$  d'une variable aléatoire  $x$  suivant une loi normale de variance  $\sigma^2 = 1024$  à l'aide d'un échantillon de taille 256. La moyenne pour l'échantillon est  $\bar{x} = 150$ .

- a) Estimer la moyenne  $m$  avec un degré de confiance  $\alpha = 0,870$ .
- b) Calculer le degré de confiance que l'on peut avoir pour l'estimation suivante :  $147 \leq m \leq 153$ .

## CONCOURS IFORD (Avril 2007) : CORRIGÉE PROBA-STAT B

### Exercice 1

On considère  $n$  variable aléatoire  $X_1, X_2, \dots, X_n$  totalement indépendantes et suivant chacune la loi  $B(1, 0)$  (Loi de Bernoulli de paramètre 0). On pose

$$z_n = \sum_{i=1}^n x_i \quad f_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

1. Déterminons la distribution de la variable  $z_n$

$z_n$  est la somme de  $n$  variables indépendantes suivant chacune une loi de Bernoulli, c'est donc une variable qui suit une loi de Bernoulli de paramètre  $m$  et  $\theta$

$$z_n \rightsquigarrow \mathcal{B}(m, \theta)$$

2. En déduisons la distribution de  $f_n$ .

$$f_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{n} z_n \text{ d'où } f_n \rightsquigarrow \frac{1}{n} \mathcal{B}(n, \theta)$$

Calculons  $E(f_n)$  et  $Var(f_n)$ .

---

INSTITUT DE FORMATION ET DE RECHERCHE DÉMOGRAPHIQUES  
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES  
(Concours type B (Avril 2007))

---

**Exercice 1**

Soit  $(a_1, \dots, a_n)$   $n$  réels tels que :  $a_1 + \frac{a_2}{2} + \dots + \frac{a_n}{n} = 0$

Démontrer qu'il existe un réel  $x$  strictement compris entre 0 et 1 tel que :

$$a_1 + a_2x + \dots + a_nx^{n-1} = 0$$

**Exercice 2**

Pour tout entier naturel  $n$ , on considère la fonction  $f_n$  définie par :  $f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$

1. Donner la relation qui existe entre cette fonction et sa dérivée.
2. Déterminer en fonction de  $n$ , le nombre de solution. réelles de l'équation  $f_n(x) = 0$

**Exercice 3**

Déterminer une fonction  $f$  de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  telle que :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 - y^2 \\ \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x, x) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, -x) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, -x) \end{cases}$$

Indication : poser  $u = x + y$  et  $v = x - y$

**Exercice 4**

Résoudre les équations différentielles réelles linéaires suivantes :

1.  $x \frac{dy}{dx} = y + x^3 + 3x^2 - 2x$
2.  $(x - 2) \frac{dy}{dx} = y + 2(x - 2)^3$

**Exercice 5**

On considère l'équation linéaire de récurrence homogène de second ordre :

$$u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2} \quad (H_2)$$

1. Calculer de proche en proche les sept premiers termes de la suite  $(v_n)$  définie par

$$\begin{cases} \text{ses deux premiers termes } v_0 = u'_0 + u''_0 = 3 \text{ et } v_1 = u'_1 + u''_1 = 4 \\ \text{la relation de récurrence } (H_2) : V_n = 5v_{n-1} - v_{n-2} \end{cases}$$

2. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , on a l'identité  $v_n = u'_n + u''_n$ .

### Exercice 6

Intégrer par partie

1.  $\int \frac{2x^2 dx}{(x^2 + 1)}$
2.  $\int x^3 \ln x dx$ , où  $\ln$  désigne le logarithme népérien (base  $e$ ).
3.  $\int x^3 e^x dx$ .

### Exercice 7

On considère l'application  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  définie par  $f(x, y) = \frac{1 + x - y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$ .

1. Calculer les dérivées partielles à l'ordre 1 de  $f$ .
2. Déterminer les points critiques de  $f$ , c'est-à-dire les points de  $\mathbb{R}^2$  où les deux dérivées partielles de  $f$  s'annulent simultanément.