

INSTITUT DE FORMATION ET DE RECHERCHE DÉMOGRAPHIQUES

ÉPREUVE DE PROBABILITÉS - STATISTIQUES

(Concours type B (Mai 2009))

Exercice 1

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon indépendant et identiquement distribué (iid) d'une loi normale de moyenne θ et de variance $\theta(1 - \theta)$ où $\theta \in]0, 1[$, est un paramètre inconnu. on considère les estimateurs de θ :

$$T_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{X} \quad T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$$

1. Montrer que T_1 et T_2 sont deux estimateurs sans biais et convergents du paramètre θ .
2. Peut-on comparer la précision de ces deux estimateurs ?

N.B. : ON donne $\text{Var}(X^2) = 2\theta^2(1 - \theta^2)$

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de densité : $f(x) = \theta^2 x e^{-\theta x}$ avec $\theta > 0$ et $x > 0$.

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon indépendant et identiquement distribué de variable parente A.

Une réalisation de cet échantillon pour $n = 100$ a donné des valeurs x_i vérifiant :

$$\sum_{i=1}^n x_i = 398 \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 = 2510.$$

1. Montrer que $\bar{X}$ est un estimateur efficace d'une fonction de θ . Donner l'espérance et la variance $\bar{X}$ et en déduire l'espérance et la variance de X .
2. En utilisant cet estimateur, déterminer un intervalle de confiance bilatéral approché sur 0 au niveau de confiance $1 - \alpha$ (on considère que n est grand).
3. A.N : calculer l'estimation de 0 et l'intervalle de confiance pour $1 - \alpha = 95\%$.

Exercice 3

On considère un échantillon suffisamment petit qui fera l'objet d'un suivi répété, afin d'estimer le nombre de repas pré-cuisinés dans une grande ville. Le taux de réponse élevé signifie que l'échantillon est essentiellement aléatoire. On a enregistré, lors d'une enquête, le nombre de repas « prêts à consommer » pris par chaque individu au cours de la semaine précédente ; et en résumé l'on obtient : $\bar{X} = 0,82$, $x = 0,48$ et $n = 180$. Calculer un intervalle de confiance à 95% pour la moyenne de la population totale de cette ville.

Exercice 4

Pour comparer la fiabilité de deux types T_1 et T_2 de machines à laver le linge, on choisit comme critère la durée de fonctionnement sans panne sur le programme « blanc », représentée comme une variable aléatoire X pour T_1 et Y pour T_2 .

On suppose que X et Y suivent les lois normales de moyennes respectives μ_1 et μ_2 et de variances σ_1^2 et σ_2^2 .

Les observations, exprimées en jours de fonctionnement, sur 10 machines de chaque type ont donné les résultats suivants :

$$\sum_{i=1}^n x_i = 142,1 \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 = 2080,5 \quad \sum_{i=1}^n y_i = 150,4 \quad \sum_{i=1}^n y_i^2 = 2345,4$$

1. Tester l'égalité des variances, au niveau de signification $\alpha = 0,10$
2. Les durées moyennes de fonctionnement sont-elles significativement différentes au seuil $\alpha = 0,005$?
3. Donner un intervalle de confiance à 95% sur la différence $\mu_1 - \mu_2$ des durées de vi moyennes des deux types de machines.
4. Les réponses aux trois questions précédentes restent-elles valables si X et Y ne suivent pas une loi normale ?

Exercice 5

Dans deux classes parallèles d'une même école, les notes, sur 20, obtenues par les élèves, à l'occasion d'une même é"preuve, sont les suivantes :

Classe A	9	15	15	7	11	12	14	10	11	8
	8	11	11	14	8	10	11	11	10	11
	7	15	12	6	14	9	15	8	8	14
	15	10	11	13	11	11	15	12	15	10

Classe B	11	9	8	13	9	8	13	14	15	15
	10	10	7	15	15	7	14	9	3	10
	15	10	15	8	15	8	14	9	6	13
	12	11	9	9	13	14	8	13	8	5

1. Comparer, par des procédés graphiques, les deux séries statistiques proposées.
2. Comparer les deux séries à l'aide de leurs caractéristiques de tendance centrale.
3. Reprendre la comparaison en utilisant les caractéristiques de dispersion.
4. Commenter.

Exercice 6

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de densité :

$$f(x) = \begin{cases} e^{\theta-x}, & x \geq \theta \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

On admet que $E(X) = \theta + 1$ et $Var(X) = 1$ et on suppose disposer d'un échantillon indépendant et identiquement distribué de grande taille.

1. Déterminer un estimateur $\hat{\theta}_1$ et θ par la méthode des moments
2. Montrer que cet estimateur est sans biais.
3. Déterminer sa variance.
4. Déterminer un intervalle de confiance bilatérale approché au niveau de confiance a en utilisant $\hat{\theta}_1$.
5. Application numérique : on dispose d'un échantillon de taille 2000 dont les principales caractéristiques sont :

$$\sum_{i=1}^n x_i = 8019, \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 = 34410 \quad \min(x_i) = 3,0001 \text{ et } \max(x_i) = 12,3751$$

Calculer l'intervalle de confiance pour $a = 5\%$.

Exercice 7

On lance trois dés et on désigne par A, B, C les événements :

A : sur les trois faces, il y a au moins un as,

B : sur les trois faces, deux au moins sont identiques ;

C : la somme des points est paire.

Évaluer les probabilités des événements $A, B, C, AB, ACBC, ABC$

INSTITUT DE FORMATION ET DE RECHERCHE DÉMOGRAPHIQUES
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
 (Concours type B (Mai 2009))

Exercice 1

On considère la fonction $y = f(x)$, définie par : $y = \sqrt{x^2 - 1}$, où x est un réel $x > 1$

1. Établir que $\frac{d^{(n)}}{dx^n} f(x) = f^{(n)}(x) = \frac{O_n(x)}{(x^2 - 1)^{\frac{n-1}{2}}}$, où P est une fonction polynomiale.
2. Préciser le monôme de plus haut degré de $P_n(x)$ (distinguer les cas $n = 0, n = 1$ et $n \geq 2$).
3. Établir que : $P_{n+1}(x) + A_n(x)P_n(x) + B_n(x)P_{n-1}(x) = 0$ où $A_n(x)$ et $B_n(x)$ sont des polynômes à préciser.
4. Démontrer que : $P'_n(x) = -n(n-2)P_{n-1}(x)$ pour tout $n \geq 1$
5. Calculer $P_1(x)$.

Exercice 2

On considère la fonction définie sur $] -1; 1[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\ln|1-x|} & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Démontrer que la fonction $f(x)$ vérifie dans un voisinage de 0 l'équation différentielle : $x(1-x)y' - (1-x)y = y^2$.
2. En déduire que, si f est développable en série dans un voisinage de 0, pour tout $n \geq 4$, les coefficients a_p de la série entière vérifient la relation :

$$(n+1)a_n = (n-1)a_{n-1} + \sum_{p=2}^{n-2} a_p a_{n-p}$$

3. Montrer que les coefficients a_n vérifient également :

$$\forall n \geq 2, a_n = \frac{1}{n+1} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{n-k+1}$$

4. En déduire les valeurs de a_2, a_3 et a_4 .

Exercice 3

Étant donné le coût de production : $C(Q) = Q_3 - Q_2 + Q + 1$, et la loi de la demande : $Q(p) = 3 - 2p$.

1. Déterminer la quantité qui minimise le coût moyen et celle qui maximise le profit total.
2. Quelle sont les valeurs de ce coût moyen minimum et de ce profit maximum ?
3. (a) On suppose par exemple, que x est impaire et y pair. Montrer qu'il existe deux entiers naturels non nuls p et q , premiers entre eux, tel que :

$$x = p - q; z = p + q \text{ et } y^2 = 4pq.$$
 (b) Montrer que p et q sont des carrés parfaits.
4. En déduire l'ensemble E . Donner tous les triplets (x, y, z) de E avec $z \leq 18$.

Exercice 4

On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels définies sur $\mathbb{R}_+$.

1. Montrer que pour tout $f \in E$, l'intégrale : $\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx$ existe.
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx$
 - (a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* I_n = n I_{n-1}$
 - (b) En déduire I_n .
3. Pour tout couple $(f, g) \in E^2$, on pose : $(f/g) = \int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) g(x) dx$
 Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E .

Exercice 5

Dans l'anneau $M^p(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre p à coefficients réels, on désigne respectivement par 0 est I la matrice nulle et la matrice unité.

On considère une matrice A de $M^p(\mathbb{R})$ pour laquelle il existe deux réels α et β distincts tels que : $(A - \alpha I)(A - \beta I) = 0$.

1. Montrer que l'on a aussi $(A - \beta I)(A - \alpha I) = 0$.
2. Exprimer A^2 en fonction de A et I .
3. Montrer que pour tout entier naturel n , il existe des réels u_n et v_n tels que :

$$A^n = u_n A + v_n I$$

4. Exprimer u_{n+1} et v_{n+1} en fonction de u_n et v_n .
5. Exprimer u_{n+2} en fonction de u_{n+1} et u_n .
6. En déduire l'expression de u_n en fonction de n , puis celle de A^n en fonction de n , A et I
7. Montrer que :

$$(a) (A - \alpha I)^2 = (\beta - \alpha)(A - \alpha I)$$

(b) $(A - \beta I)^2 = (\alpha - \beta)(A - \beta I)$

8. En déduire les expressions de $(A - \alpha I)^n$ et $(A - \beta I)^n$ pour tout entier naturel n .
9. Montrer que A est une combinaison linéaire de $(A - \alpha I)$ et $(A - \beta I)$.
10. En déduire l'expression de A^n en fonction de n , A et I . Comparer ce résultat à celui de la question 6).

Exercice 6

On considère une population P ayant un taux d'accroissement naturel annuel moyen constant r . On désigne par P_0 l'effectif de cette population à la date de la première observation $t = 0$.

1. Calculer P_1, P_2, P_3 et P_4 .
2. En déduire que la population P croît suivant une suite géométrique dont on déterminera la raison.
3. On appelle temps de doublement d'une population le temps t tel que $P_1 = 2P_0$. Calculer t (r constant).
4. Application numérique : Calculer le temps de doublement des populations dont les taux d'accroissement naturels annuels moyens sont les suivants : 0,1 ; 0,5 ; 1,0 ; 1,5 ; 2,0 ; 2,5 ; 2,7 ; 3,0 ; 3,5 et 4,0

Exercice 7

On dit qu'une fonction réelle f est une *fonction logistique* si et seulement si la fonction définie par $\frac{df(t)}{f(t)dt}$ est une fonction linéaire décroissante de f .

Soit $P(t)$ l'effectif de la population d'un pays donné au temps t . On suppose que $P(t)$ vérifie la relation suivante : $\frac{dP(t)}{dt} = aP(t) \left(1 - \frac{P(t)}{L}\right) - eP(t)$, où a , L et e sont des constantes positives avec $a > e$.

Montrer que $P(t)$ est une *fonction logistique* (on dit aussi que P définit une population logistique).