**INSTITUT DE FORMATION ET DE RECHERCHE DÉMOGRAPHIQUES**

ÉPREUVE DE PROBABILITÉS - STATISTIQUES

(Concours type B (Avril 2008))

## Exercice 1

Une observation auprès d'un échantillon de commerçants à conduit à la répartition suivante de leur attitude (favorable ou défavorable) vis-à-vis du condom selon leur sexe.

| Attitude | Sexe | | |
|---|---|---|---|
| | Masculin | Féminin | Ensemble |
| Favorable | 30 | 33 | 63 |
| Défavorable | 93 | 6 | 99 |
| Ensemble | 123 | 39 | 162 |

Peut'on affirme que l'attitude vis-à-vis du condom dépend du sexe du commerçant ?

## Exercice 2

Une firme pharmaceutique souhaite lancer sur le marché d'un pays africain un préservatif féminin. Une étude économique a montré que le lancement de ce préservatif ne pouvait être rentable que s'il y avait au moins 20% d'acheteurs potentiels. Un sondage sur 1600 femmes ? sexuellement actives a monté que 192 sont favorables au préservatif féminin. Avec un risque d'erreur de 2,5%, quelle décision conseilleriez-vous à la firme pharmaceutique ? Justifier votre réponse.

## Exercice 3

On se propose d'étudier la taille (en cm) des individus dans une population de 1000000 personnes. On sait que, pour cette population, la taille moyenne des individus est de 170 cm et la variation de 400 cm. On tire au hasard dans cette population des échantillon de 100 personnes.

1. Quelle loi suit la taille moyenne des échantillons ? Déterminer la moyenne et l'écart type de cette distribution d'échantillonnage de tailles moyennes.
2. Déterminer la probabilité pour que, dans un groupe de 10à personnes issu de la population, la taille moyenne soit inférieure à 165 cm.
3. Déterminer la probabilité pour que, dans un groupe de 100 personnes issu de la population, la taille moyenne soit supérieure à 172 cm.
4. Déterminer la probabilité pour que, dans un groupe de 100 personnes issu de la population, la taille moyenne soit comprise entre 168 et 175 cm.

## Exercice 4

On sait que 20% des femmes en âge de procréer (15-49ans) d'un pays africain sont favorables à la contraception moderne. On fait des sondage sur des échantillons de 100 femmes en âge de procéder.

1. Déterminer la loi que suit la proportion $f_i$ des échantillon de 100 femmes favorables à la contraception moderne.
2. Déterminer la probabilité pour que, dans un groupe de 100 femmes, moins de 15% soient favorable à la contraception moderne.
3. Déterminer la probabilité pour que, dans le même groupe, plus de 27% soient favorable à la contraception moderne.
4. Déterminer la probabilité pour que la proportion de favorables soit comprise entre 15% et 25%.

## Exercice 5

Le tableau suivant indique la distribution conjointe de l'âge (en années révolues) et du taux de concentration du cholestérol dans le sang (en g/l) de 10 individus.

| X (âge) | Y (taux de contraception du cholestérol) |
|---|---|
| 30 | 1.6 |
| 60 | 2.5 |
| 40 | 2.2 |
| 20 | 1.4 |
| 50 | 2.7 |
| 30 | 1.8 |
| 40 | 2.1 |
| 20 | 1.5 |
| 70 | 2.8 |
| 60 | 2.6 |

1. Calculer les moyennes des variables X et Y.
2. Calculer les variances des variables X et Y.
3. Tracer le nuage de points Y en fonction de X.
4. Quel type d'ajustement peut-on appliquer à ces données ?
5. Calculer et commenter le coefficient de corrélation linéaire.
6. Estimer l'équation de la droite de régression de type $Y = aX + b$.
7. Estimer les taux de cholestérol des individus âgés de 10 ans et 35 ans, respectivement.
8. Ces deux résultat sont-ils la même fiabilité ?

**Exercice 6**

I. On considère une famille de 2 enfants. On suppose que les probabilités d'avoir un enfant de sexe masculin ou un enfant de sexe féminin sont équiprobables. On définit les événements suivants :

– H : « la famille a un garçon » ;

– A : « l'aîné est un garçon » ;

– B : « les deux enfant sont des garçons ».

1) Calculer les probabilités de survenance des événements H, A et B

2) Calculer les probabilité conditionnnelles $P(B/H)$ et $P(B/A)$

II. Soit$\Omega$ l'ensemble des compositions possibles en filles et en garçon des familles ayant un nombre quelconque d'enfants. On désigne par $H_n$ l'ensemble des familles de $n$ enfants. Pour tout entier $n$ on pose :

$$P(H_n) = p_n \quad \text{avec} \quad \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$$

On suppose que pour tout entier $n$, les différentes répartitions filles-garçons d'un famille de $n$ enfants sont équiprobables.

Soit $A$ l'événement « une famille n'a pas de fille »

1) Calculer la probabilité $P(A \setminus H_n)$.

2) Déduire les probabilité $P(A \cap H_n)$ et $P(A)$.

3) Pour $n = 1$, calculer $P(H_1 \setminus A)$. Cette probabilité est appelée *probabilité des causes.*

**INSTITUT DE FORMATION ET DE RECHERCHE DÉMOGRAPHIQUES**

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

(Concours type B (Avril 2008))

**Exercice 1**

Trouver l'ensemble des polynômes $P$ de $C[X]$ tels que : $P(X^2) = P(X)P(X+1)$

**Exercice 2**

On considère la suite de polynômes $(P_n)$ $n \in \mathbb{N}$ définie par : $P_0 = 1$ ; $P_1 = X$

$$\forall x \geq 1 \quad P_n = P_{n-1} \ ; \ \forall n > 1 \quad P\left(-\frac{1}{2}\right) = P_n\left(\frac{1}{2}\right)$$

(On désignera de la même façon le polynôme $P_n$ et la fonction polynomiale correspondante).

1. Déterminer les polynômes $P_1$ et $P_3$
2. Démontrer que pour tout entier $n$ le polynôme $P_n$ est de même parité que l'entier $n$.
3. En déduire les valeurs de $P_n(t)$ où $n$ est un entier impaire supérieur ou égal à 3 et $t \in \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}$.
4. Étudier les variations de la fonction $P_3$ sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ et tracer sa courbe représentative sur cet intervalle.
5. En déduire les variations de la fonction $P_4$ sur cet intervalle $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.
6. Démontrer que $P_4$ admet sur cet intervalle deux zéros réels et deux seulement.
7. On suppose que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ ; $B_n = n!P_n\left(-\frac{1}{2}\right)$
   (a) Calculer $B_0$ ; $B_1$ ; $B_2$ et $B_3$
   (b) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall t \in [0,1] \quad P_n\left(-\frac{1}{2} + t\right) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k T^{n-k}$
   (c) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de $B_n$ en fonction de $B_0, \ldots, B_{n-1}$
   (d) Calculer $B_4$ ; $B_5$ et $B_6$.

**Exercice 3**

On se propose de déterminer l'ensemble $E$ des triplets $(x, y) \in \mathbb{N}^{*3}$ tels que $x^2 + y^2 = z^2$

1. Montrer que pour tout couple $(a, b)$ d'entier naturels tels que $a > b$, le triplet $(a^2 - b^2, 2ab, a^2 + b^2)$ appartient à l'ensemble $E$.
2. Donner six solutions distinctes.
3. Soit $(x, y, z)$ un élément de $E$ tel que $x \wedge y = 1$
   (a) Montrer qu'alors $x \wedge z = 1$ et $y \wedge z = 1$
   (b) Montrer que $x$ et $y$ ne sont pas de même parité.

## Exercice 4

$F_p(x)$ étant le polynôme factoriel d'ordre $p$ calculer :

1. $F_p(p)$ ;
2. $F_p(n)$ pour $n < p$ $(n \in \mathbb{N})$ ;
3. $F_p(m)$ pour $m > p$ $(m \in \mathbb{N})$
4. $\Delta F_p(x)$ ; $\Delta^2 F_p(x)$ ;
5. la dérivée de $F_p(x)$ au point $x = p^{-1}$

## Exercice 5

Étant donné $n$ nombres réels positifs $x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n$ et un nombre réel $k$, on appelle moyenne potentielle d'ordre $k$ la quantité :

$$m_k = \sqrt[k]{\frac{x_1^k + x_1^k + \cdots + x_i^k + \cdots + x_n^k}{n}} = \left[\frac{x_1^k + x_1^k + \cdots + x_i^k + \cdots + x_n^k}{n}\right]^{\frac{1}{k}}$$

On note : $G = [x_i \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n]^{\frac{1}{n}} = \left[\prod_{i=1}^{n}\right]^{\frac{1}{n}}$ la moyenne géométrique de $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$.

Montrer que :

1. $m_0 = \lim\limits_{k=0} m_k =)G$
2. $m \leq m_k$ quand $k > 1$.
3. $m \geq m_k$ quand $0 < k < 1$
4. $m \geq m_k$ quand $k < 0$.
5. $m_{k'} \geq m_k$ quand $k' > k$.

## Exercice 6

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & \\ 3 & 3 & 3 & & \\ \vdots & & & & \\ n & n & n & \cdots & \end{pmatrix}$

Où $n$ désigne un entier supérieur ou égal à 3 et les vecteurs de $C^n$ ou de $R^n$ sont identités à des matrices colonnes à $n$ lignes.

1. Démontrer que les valeurs propres de $A$ sont réelles et que $A$ est diagonalisable.
2. Écrire le système (I) des équations qui exprime que le vecteur $X$ est vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre $\lambda$.

3. Établir que ce système (I) est équivalent à système (II) dans lequel la première équation $E_1$ relie $x_1$ et $x_2$ l'équation $F_p$, pour $p$ variant de 2 à $n-1$, relie $x_{p-1}$, $x_p$ et $x_{p+1}$ et l'équation $G_n$ relie $x_{n-1}$ et $x_n$.
4. Démontrer que 0 n'est pas une va leur propre de $A$ et déterminer la dimension de chacun des sous espace propre. Combien cette matrice possède-t-elle de valeurs propres distinctes ? Justifier votre réponse ?

**<u>Exercice 7</u>**

On considère la matrice suivant :

$$M = \begin{pmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ x^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{pmatrix}$$

Sans le développer, mettre le déterminant de la matrice de la matrice $M$ sous forme de produit de facteurs puis calculer sa valeur.

**<u>Exercice 8</u>**

1. Démontrer par récurrence la formule de LEIBNIZ donnant la dérivée p-iéme du produit de deux fonctions $f$ et $g$.
$$(fg)^{(p)} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} f^{(k)} g^{(p-k)}$$
2. Démontrer que si $A$ est symétrique définie positive, il existe deux matrices non singulières $S$ et $T$ telles que : $S'AS = I$ et $T'T = A$.