

INSTITUT DE FORMATION ET DE RECHERCHE DÉMOGRAPHIQUES

ÉPREUVE DE PROBABILITÉS - STATISTIQUES

(Concours type B (Mars 2011))

Exercice 1

Dans un collège X en Sciences de la nature, l'effectif d'élèves du programme est composé à parts égales de filles et de garçons et 60% des élèves veulent se diriger dans le domaine de la santé. De plus, on sait que la probabilité qu'un élève soit un garçon voulant aller dans un domaine autre que celui de la santé est de 0,35.

1. Symbolisez les événements mentionnés et relevez les probabilités explicites de cette situation. En d'autres termes, traduisez mathématiquement les renseignements donnés.
2. Un élève est choisi au hasard. Déterminer la probabilité des événements :
 - a. L'élève ne se dirige pas dans le domaine de santé.
 - b. L'élève est un garçon se dirigeant dans le domaine de la santé.
 - c. L'élève est un garçon ou un élève se dirigeant dans le domaine de la santé.
 - d. L'élève est une fille et elle ne se dirige pas dans le domaine de la santé.

Exercice 2

La probabilité de migrer à une distance r peut être approchée par une fonction de type Pareto $m_1(r) = \frac{k_1}{r^a}$

1. Calculer la probabilité de migrer à une distance supérieure à R $M_1(R) = \int_R^\infty m_1(r)dr$.
2. Discuter les valeurs de $M_1(R)$ en fonction de R et des paramètres k_1 et a .
3. Reprendre les questions 1) et 2) si la probabilité de migrer à une distance n'est approchée par une fonction exponentielle $m_2(r) = k_2 e^{-br}$.

Exercice 3

Les lampes électriques fabriquées par un industriel A ont une durée de vie moyenne de 1400 heures avec un écart type de 200 heures, tandis que celles fabriquées par un industriel B ont une durée de vie moyenne de 1200 heures avec un écart type de 100 heures. Si l'on teste des échantillons aléatoires de 125 lampes de chaque marque, quelle est la probabilité que les lampes A aient par rapport aux lampes B une durée moyenne de vie au moins :

1. Supérieure de 160 heures,
2. Supérieure de 250 heures.

Exercice 4

Un échantillon de sondage électoral constitué de deux groupes d'électeurs de circonscription X et Y , de taille 300 et 200 respectivement, a mis en évidence des intentions de vote de 56% et 48% pour un candidat donné. Vérifier les hypothèses suivantes au seuil de signification de 5% :

1. Il y a une différence entre les circonscriptions X et Y .
2. Le candidat est préféré dans la circonscription X .

Exercice 5

Deux groupes A et B sont formés chacun de 100 malades du cancer de la Thyroïde. Un sérum devant guérir cette affection est administré aux malades du groupe A mais pas à ceux du groupe B (qui constitue le groupe de contrôle). À part cette différence, les traitements sont identiques dans les deux groupes. Les traitements montrent que dans les groupes A et B, 75 et 65 personnes respectivement guérissent. Tester l'hypothèse selon laquelle le sérum est efficace aux niveaux de signification suivants :

1. 1%
2. 5%
3. 10%

Exercice 6

Le recensement général de la population et de l'habitation du pays IFORDIA a permis de répartir sa population par sexe selon l'état matrimonial au 31 décembre 1998 (tableau 1).

Sexe	État matrimonial				
	Célibataire	Mariés	Veufs	Divorcés	Total
Hommes	2 181 954	2 411 630	135 914	264 220	4 993 718
Femmes	1 894 892	2 418 631	598 705	307 806	5 220 034
Total	4 076 846	4 830 261	734 619	572 026	10 213 752

TABLEAU 1 – Répartition de la population d'IFORDIA par sexe selon l'état matrimonial au 31 décembre 1998.

1. À partir du tableau 1 établir les répartitions proportionnelles par sexe par statut matrimonial et par rapport à la population totale :
2. Laquelle de ces trois répartitions proportionnelles permettrait de comparer :
 - (a) Les pourcentages de célibataires parmi les hommes et les femmes.

- (b) Les pourcentages d'hommes parmi les célibataires et les divorcés.
- (c) Les pourcentages d'homme et de femme parmi les célibataires.
- (d) Les pourcentages d'hommes célibataires et de femmes divorcées dans la population totale.
3. Laquelle des trois répartitions proportionnelles faut-il utiliser pour répondre aux questions suivantes :
- (a) Parmi les célibataires, quel est le sexe qui domine ?
- (b) Le célibat touche-t-il proportionnellement plus d'hommes que de femmes ?
- (c) Le déséquilibre hommes/femmes est-il même parmi les veufs/veuves et parmi les divorcé(es) ?

Exercice 7

On a mesuré le périmètre crânien et le tour de hanche d'un échantillon de 50 étudiants d'une université de la République d'IFORDIA. Les données, exprimées en cm, sont présentées dans le tableau 2

I	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X_i	37	37	33	33	36	34	37	37	35	32	32	34	40	39	39	39	39	37	37	37
Y_i	76	75	76	69	73	70	74	73	76	72	66	75	84	88	80	78	78	79	84	85

I	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
X_i	38	38	38	38	38	35	40	32	34	32	39	39	39	39	37	38	38	37	37	38
Y_i	84	82	82	76	74	76	84	66	75	72	88	80	78	78	79	76	74	84	85	84

I	42	43	44	45	46	47	48	49	50
X_i	38	37	37	33	33	36	34	37	37
Y_i	82	76	75	76	69	73	70	74	73

TABLEAU 2 – Répartition de 50 étudiants de la République IFORDIA par périmètre crânien et par tour de hanche.

- Dépouiller ces informations sous forme de tableau de contingence en formant des classes d'amplitude 2 pour la variable X et 4 pour la variable Y .
- Calculer pour chaque variable la moyenne marginale ainsi que l'écart-type.
- Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y .
- Que peut-on dire de la relation entre X et Y ?

Exercice 8

Le tableau 3 reprend la répartition des femmes en âge de procréer par nombre d'enfants nés vivants déclarés à l'issue du recensement général de la population d'un pays X .

Nombres d'enfant	Nombre de femmes
0	473 836
1	778 159
2	676 157
3	379 425
4	214 080
5	115 202
6	64 979
7	37 860
8	22 733
9	13 659
10 et +	21 064

TABLEAU 3 – Répartition des femmes en âge de procréer par nombre d'enfants nés vivants.

- Calculer le nombre d'enfant dont la mère a moins de 10 enfants
- Sachant que le nombre total d'enfants s'élève à 5 838 792
 - Quel est le nombre d'enfant des mères de 10 enfants et plus ?
 - En déduire le nombre moyen d'enfants par femme pour ces mères.
- Calculer le nombre moyen d'enfants par femme pour l'ensemble des femmes considérées.

Exercice 9

Une industrie de machinerie lourde affirme que depuis quelques années les machines qu'elle fabrique font de moins en moins de bruit. Le comité Santé et Sécurité au travail d'une usine dont tout l'équipement provient de cette industrie désire vérifier ces dires.

Une équipe choisit au hasard des machines faisant partie de son équipement et note le niveau de bruit développé lors du fonctionnement de la machine de même que l'année de fabrication (voir tableau 4)

- Représenter le nuage de points.

Année de fabrication	Niveau de bruit (décibels)
68	91,3
71	90,1
80	85,4
82	88,6
75	89,3
90	87,1
73	87,8
84	86,3
88	86,0
78	88,7
70	89,5
86	85,2
82	86,6
90	86,4
77	87,1

TABLEAU 4 – Niveau de bruit (décibels) des machines par année de fabrication.

- Calculer le coefficient de corrélation, le coefficient de détermination et trouver l'équation de la droite de régression.
- Interpréter les coefficient de corrélation et de détermination.
- Trois ex-employés sont atteint de surdité partielle et pointent le niveau de bruit des machines qu'il utilisaient. Que peut-on supposer comme niveau de bruit pour une machine fabriquée en 1979 ? En 1989 ? En 1996 ?

CONCOURS IFORD (Mars 2011) : CORRIGÉE PROBA-STAT B

Exercice 1

- Traduisons mathématiquement les renseignements donnée.

Soit F : l'élève est une fille,

G : l'élève est un garçon,

A : l'élève se dirige dans le domaine de la santé.

On a : $P(F) = 0,5$ $P(G) = 0,5$ $P(A) = 0,6$

$P(G \cap \bar{A}) = P(G \setminus A) = 0,35$

INSTITUT DE FORMATION ET DE RECHERCHE DÉMOGRAPHIQUES

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

(Concours type B (Mars 2011))

Exercice 1

1. Étudier la variation du polynôme du 3^e degré $f(x) = k(x - a)(b - x)^2$, où a et b sont trois constantes telle que $k > 0$ et $a < b$.
2. Représenter dans un repère orthonormé la variation de ce polynôme

Exercice 2

Dans une culture le taux d'accroissement instantané du nombre de bactéries est proportionnel à ce nombre.

1. Si l'on constate que le nombre double en 4 heures, quel sera-t-il au bout de 12 heures ?
2. S'il y a 10^4 bactéries au bout de 3 heures et 4×10^4 au bout de 5 heures, quel était le nombre initial ?

Exercice 3

Résoudre le système d'équation linéaires suivant :

$$\begin{cases} 2\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 4x - y = e^t \\ \frac{dx}{dt} + 3x + y = 0 \end{cases}$$

Exercice 4

On veut calculer une meilleure approximation de la solution particulière de l'équation différentielle $y' = f(x, y)$ par le méthode de Picard.

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx \quad (1)$$

Pour $x = x_0$, la valeur correspondant de y est y_0 . Une première approximation y_1 est obtenue en remplaçant y par y_0 dans l'équation (1) c'est-à-dire :

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx \quad (2)$$

Une deuxième approximation y_2 est alors obtenue en remplaçant y par y_1 dans l'équation (1) et on :

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_1) dx \quad (3)$$

En répétant le procédé, on obtient une succession de valeur $y_0, y_1, y_2, y_3, \dots$, chacune donnant une meilleure approximation de la valeur cherchée.

Application numérique

Calculer les 3 premières valeurs approchées de y , y_1, y_2 et y_3 , pour $x = 0, 1$, sachant que pour $y = 1, x = 0$ et que $y' = \frac{dy}{dx} = 3x + y^2$.

Exercice 5

1. Si une population compte un million d'habitants et s'accroît chaque année de 10 000 habitants, quel sera son effectif après x années ?
2. La population d'un pays comptait en 2010, 70,56 millions d'habitants. Si un taux annuel d'accroissement de 1,7% se maintient jusqu'en 2025, quel sera l'effectif de la population en 2015, 2020, 2022 et 2025 ?
3. Si la population d'un pays double en 50 ans, en combien de temps triplera-t-elle, compte tenu de ce que le taux instantané d'accroissement est proportionnel au nombre d'habitants ?

Exercice 6

Soit E un espace vectoriel de dimension 2 rapporté à une base $(\vec{i}, \vec{j})$ et M l'ensemble des endomorphismes de E admettant dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}$ où a et b sont deux tels que $a - b \neq 1$

1. Soit φ un élément de M . Montrer qu'il existe une droite vectorielle (D_1) dont on précisera une base $(\vec{e}_1)$ en fonction de a et b telle que pour tout vecteur $\vec{u}$ de (D_1) , $\varphi(\vec{u}) = \vec{u}$
2. Montrer qu'il existe un nombre réel unique k différent de 1 que l'on exprimera en fonction de a et b tel que l'ensemble $\{\vec{u}, \vec{u} \mid \varphi(\vec{u}) = k\vec{u}\}$ soit une droite vectorielle (D) . Déterminer une base $(\vec{e}_2)$ de (D) .
3. Montrer que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base de E et exprimer la matrice de φ dans cette base.
4. donner une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que φ ne soit pas bijectif.

Exercice 7

Tokam part du Cameroun avec une somme de 657.000 FCFA et doit visiter n pays d'Afrique situés dans la zone hors CFA. Sachant que le taux d'échange est de 15% à chaque frontière et que tous les frais de séjours et de transport y compris le transport au Cameroun sont pris en charge par ses amis.

1. Combien lui reste-t-il au troisième pays ?

- Combien de pays doit-il visiter pour qu'au retour au Cameroun il lui reste moins de 200.000FCFA ?

Exercice 8

Soit (u_n) une suite telle que $u_0 \in [0, 1]$ et pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} \text{si } u_n < \frac{1}{2} & u_{n+1} = 2u_n \\ \text{si } u_n \geq \frac{1}{2} & u_{n+1} = u_n - \frac{1}{2} \end{cases}$$

- Démontrer que si u_0 est rationnel, la suite (u_n) est périodique à partir d'un certain rang.
- La réciproque est-elle vraie ?
- Pour quelles valeurs de u_0 la suite (u_n) est-elle convergente ?

Exercice 9

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E) : y'' + 2y' + 5y = 0$.
- Déterminer la solution f qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$.
- On pose $F(x) = -\frac{1}{5}[f'(x) + 2f(x)]$.

(a) Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Expliciter $F(x)$

(b) En déduire le calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$

Exercice 10

On note $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de la fonction numérique de la variable réelle x , définie par :

$$f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}}$$

- Montrer que pour tout entier naturel n , il existe un polynôme de degré n noté P_n , tel que :

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+\frac{1}{4}}}$$

- Trouver une équation différentielle du premier ordre vérifiée par f
- En déduire que $P_{n+1}(x) + (2n + \frac{1}{2})xP_n(x) + n(n - \frac{1}{2})(1+x^2)P_{n-1}(x) = 0$
- En déduire que : $P_n(x) = -n(n - \frac{1}{2})P_{n-1}(x)$
- Montrer que pour tout entier naturel n non nul, P_n admet n racines réelles distinctes.