Université de Yaoundé II

INSTITUT DE FORMATION
ET DE RECHERCHE DEMOGRAPHIQUES
(I.F.O.R.D.)

- janvier 2001 -

CONCOURS DE RECRUTEMENT

EPRUVE DE CULTURE GENERALE
(Concours A & B)

Durée : 4 heures

Aucun document n'est autorisé

Sujet 1

L'Organisation des Nations Unies a adopté deux textes qui énoncent clairement le principe de l'égalité des sexes et condamnent toute discrimination à l'encontre des femmes. Il s'agit des textes suivants :

- la Déclaration Universelle des Droits de l'homme (1948),
- la Convention sur l'Élimination de toutes les formes de Discrimination à l'égard des femmes (1979)

Pensez vous qu'il est possible d'appliquer correctement ces textes dans les pays africains ?

Sujet 2

La mondialisation occupe de plus en plus le devant de la scène internationale. Les uns défendent ses avantages, les autres ses dangers. Où en est l'Afrique dans ce débat?

Sujet 3

Des recherches effectués en Afrique et en Asie sur l'évaluation de la valeur économique des enfants ont montré que dans bien des cas, les enfants, même en bas âge, loin d'être un fardeau pour les familles, apportaient une contribution réelle à leur bien-être. Cette constatation a fait dire à une personnalité politique africaine que « le travail des enfants est un mal nécessaire ».

Partagez vous cette opinion ?

N.B. LE CANDIDAT TRAITERA L'UN DE CES TROIS SUJETS AU CHOIX.

Université de Yaoundé II

INSTITUT DE FORMATION
ET DE RECHERCHE DEMOGRAPHIQUES
(I.F.O.R.D.)

- Janvier 2001 -

CONCOURS DE RECRUTEMENT

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
(Concours B)

Durée : 4 heures

Aucun document n'est autorisé
Utilisation des calculatrices autorisées

BAREME INDICATIF :

Exercice 1 : 5 points
Exercice 2 : 3 points
Exercice 3 : 2 points
Exercice 4 : 4 points
Exercice 5 : 6 points

Exercice 1

Soit $p : x \rightarrow p(x)$ la fonction de survie d'une population donnée en fonction de l'âge x.

On appelle fonction logit la fonction de variable réelle x définie par:

$$\text{logit } x = \frac{1}{2} \text{ Log } \frac{x}{1-x}$$

1) Etudier les variations de la fonction logit.

2) Représenter graphiquelement la courbe de la fonction logit.

3) Soit $p_s(x)$ la fonction de survie standard vérifiant la relation :

$$\text{logit } p(a) = \sigma + B \text{ logit } p_s(a)$$

a) On suppose $B = 1$ et $p_s(a) = 0,5$. Etudier le signe $p(\alpha)$ en fonction de σ.

b) On suppose maintenant que $\sigma = 0$. Comparer, suivant les valeurs de B, $p(a)$ et $p_s(a)$.

c) Calculer δ et B sachant que :

pour $a = 2$, $\text{logit } p(2) = 0,56603$ et $\text{logit } p_s(2) = 0,8052$
pour $a = 20$, $\text{logit } p(20) = 0,15944$ et $\text{logit } p_s(20) = 0,4551$.

4) Déterminer les probabilités de survie $p_s(a)$ d'une population donnée connaissant les logit p(a) (tableau 1).

Tableau 1 : Logit par âge.

âge exact a	logit p(a)	âge exact a	logit p(a)
1	0,788716	40	- 0,158092
5	0,38[illegible]187	45	- 0,244493
10	0,269383	50	- 0,344480
15	0,226763	55	- 0,465720
20	0,159408	60	- 0,612973
25	0,0755621	65	- 0,804123
30	- 0,0032914	70	- 1,044744
35	- 0,079240	75	- 1,376295

Exercice 2

On considère la fonction y définie par : $y : x \to f(x) = \text{Log}\,\dfrac{x}{x^k}$

1) Calculer : $\int_n^b f(x)dx$, lorsque b tend vers $+\infty$.

2) Préciser brièvement la nature de la série de terme général $U_n = \text{Log}\,\dfrac{n}{n^k}$

3) S étant la somme de la série de terme général $Un = \text{Log}(n/n^2)$ et S_n la somme de ses n premiers termes, montrer que $S_n + (1 + \text{Log}n)/n$ ~~est une~~ valeur approchée de S par excès.

Exercice 3

Parmi 10.000 nouveau-nés, 8.000 survivent à 30 ans et 800 survivent à 80 ans.

a) Déterminer par interpolation polynomiale le nombre de survivants à 50 ans.

b) Si l'on est amené à penser que la courbe des survivants admet un point d'inflexion pour un âge égal à 70 ans, améliorer l'estimation du nombre de survivants à 50 ans.

Exercice 4

On donne la matrice

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Calculer J^2.

b) I étant la matrice unité d'ordre 4, on considère une matrice de la forme : $\Lambda = aI + bJ$, a et b étant des nombres complexes. Montrer que Λ^n (n entier strictement positif) est de la forme : $\Lambda^n = a_nI + b_nJ$.

Calculer a_n et b_n fonction de a, b, n.

c) On donne la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} J & 0 & j^2 & 0 \\ 0 & j & 0 & j^2 \\ j^2 & 0 & j & 0 \\ 0 & j^2 & 0 & j \end{bmatrix}$$

(1, j, j^2 sont des racines cubiques de l'unité)

Calculer les matrices A^2 et A^3.

Exercice 5

On se propose de projeter la population d'un pays donné de l'année t_0 à l'année t_n. Soit P(0) la structure par âge de cette population à l'année t_0 et M la matrice de projection sur un intervalle de temps de α années. On pose :

$$P(\alpha) = MP(0) \text{ et } P(2\alpha) = M^2P(0).$$

1) Montrer par récurrence que : $P(n\alpha) = M^nP(0)$.

2) On fixe la valeur de α à 15 ans. Calculer les paramètres a, b et c de la matrice de projection M tels que :

$$M = \begin{bmatrix} 0{,}30 & a & b \\ 0{,}99 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{bmatrix}$$

et les structures par âge de la population âgée de moins de 45 ans définies pour $\alpha = 0$ et $\alpha = 30$ par les données du tableau ci-dessous :

Groupe d'âges (ans)	P(0)	P(30)
0 – 14	2 900	2 794
15 – 29	2 700	2 663
30 – 44	2 000	2 800

3) Calculer P(15) et P(45)

4) Le vecteur propre associé à la valeur propre λ de la matrice M permet de définir la structure stable associée à la matrice M. La valeur de λ sont comprises entre 0 et 2 et on a :

Université de Yaoundé II

INSTITUT DE FORMATION
ET DE RECHERCHE DEMOGRAPHIQUES
(I.F.O.R.D.)

- Janvier 2001 -

CONCOURS DE RECRUTEMENT

EPREUVE DE PROBABILITES ET STATISTIQUE
(Concours B)

Durée : 4 heures

Aucun document n'est autorisé
Utilisation des calculatrices autorisées

BAREME INDICATIF :

Exercice 1 : 2 points
Exercice 2 : 3 points
Exercice 3 : 3 points
Exercice 4 : 3 points
Exercice 5 : 4 points
Exercice 6 : 5 points

Exercice 1 BAMBA

Soit Y une variable aléatoire positive. Désignons par :

- $f(t)$, $t \in R^+$, la densité de Y ;

$$F(t) = P(Y \leq t) = \int_0^t f(x)dx,$$ la fonction de répartition de Y.

F est continue et croissante avec $F(0) = 0$, $F(+\infty) = 1$ et $f(t) = \dfrac{dF(t)}{dt}$

- $S(t) = P(Y > t) = 1 - F(t)$

$$= \int_t^{\infty} f(x)\,dx$$

- $h(t) = \dfrac{f(t)}{1 - F(t)}$

Démontrer que : $S(t) = \exp\left(-\int_0^t h(x)\,dx\right)$

Exercice 2 Hélène

Une urne contient des boules blanches et des boules noires dans les proportions suivantes : 2/3 de boules blanches et 1/3 de boules noires.

On tire une boule, si elle est noire le jeu est terminé. Si elle est blanche on la remet dans l'urne et on procède à un nouveau tirage et ainsi de suite.

Soit X la variable aléatoire « nombre de tirages effectués avant que le jeu se termine ».

1) Donner la loi de probabilité de X. Vérifier que la somme des probabilités correspondantes est égale à 1.

2) Donner le tableau de distribution de X et en faire la représentation graphique.

3) Calculer les probabilités suivantes :

$P(X \geq 3)$
$P(X \leq 5)$
$P(4 < X < 7)$

Exercice 3

Dans une population de N habitants, on tire un échantillon de n individus afin d'étudier un phénomène social mesuré par la variable $\bar{X}$ de moyenne μ et d'écart-type σ. Ainsi à chaque individu i de l'échantillon correspond une valeur de x notée X_i avec $i = 1, 2, \ldots n$.

1) Peut-on dire que les X_i sont des variables aléatoires. Pourquoi ?

2) Quelle est la distribution de chaque variable X_i ?

3) A quoi correspond la probabilité pour qu'une variable X_i quelconque prenne la valeur a ?

4) Comment peut-on considérer le n-uplet $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

5) Montrer que $E(\bar{X}) = \mu$ et donner l'expression de $V(\bar{X})$ en fonction de σ. Que peut-on en conclure lorsque la taille de l'échantillon augmente ?

Exercice 4

Une enquête effectuée au sein d'une population donnée montre que :

60 % des individus lisent une revue A,
50 % des individus lisent une revue B,
50 % lisent une revue C,
30 % lisent les revues A et B,
20 % lisent les revues B et C,
30 % lisent les revues A et C,
10 % lisent les revues A, B et C.

On considère le caractère X qui associe à chaque individu le nombre de revues qu'il lit dans l'ensemble {A, B, C}.

Déterminer les fréquences pour les différentes modalités du caractères X.

Tracer le diagramme en bâtons et l'histogramme en secteurs de la distribution du caractère X.

Exercice 5

Le tableau ci-après donne (en unités convenables) les valeurs Y des pressions de déchirure et celles des épaisseurs X de 7 feuilles d'aluminium soumises à des essais d'éclatement (voir tableau ci-dessous).

Epaisseur (X)	Pression (Y)
1	1
2	5
3	15
4,5	21
5	22
8	47
10	57

1) Calculer la covariance de X et de Y et les coefficients de régression de Y sur X.

2) Tracer sur un plan rapporté à 2 axes de coordonnées les 7 points figuratifs du couple (X,Y), la droite de régression de Y sur X et la droite de régression de X sur Y.

3) Pour une feuille d'épaisseur 12, à quelle pression de déchirure doit-on s'attendre ?

Exercice 6

On inscrit les 9 lettres du mot ARABESQUE sur 9 morceaux de papier, une lettre par morceau de papier. Les 9 morceaux de papier sont ensuite placés dans une urne.

1) On tire au hasard 5 papiers sans remise de cette urne.

a) Quelle est la probabilité de tirer les lettres du mot SERBE dans l'ordre ?

b) Quelle est la probabilité de pouvoir reconstituer le mot BASQUE ?

2) On tire au hasard 8 papiers avec remise.

a) Quelle est la probabilité de tirer les lettres du mot BRASSEUR dans l'ordre ?

b) A-t-on plus de chance de tirer dans le désordre BARABBAS que BERBERES ?