

UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ II
INSTITUT DE FORMATION ET DE
RECHERCHE DEMOGRAPHIQUES
(I.F.O.R.D)

Avril 1999

CONCOURS DE RECRUTEMENT

EPREUVE DE CULTURE GÉNÉRALE

(Epreuve commune aux concours A et B)

Durée : 4 heures

Aucun document n'est autorisé

TRAITER L'UN DES TROIS SUJETS AU CHOIX

Sujet I :

Globalisation et mondialisation sont des expressions presque synonymes et qui sont désormais bien installées dans notre univers linguistique quotidien. Ces termes sont souvent utilisés, sans qu'on ait toujours conscience des réalités et processus qu'ils sont supposés désigner. Or la globalisation comme la mondialisation traduisent l'aboutissement de processus anciennement ancrés dans l'histoire de l'humanité, et qu'il est utile d'explicitier pour mieux comprendre les évolutions actuellement en cours, ainsi que la mutation de leurs différents objets. Comment faire comprendre cette problématique à ceux qui se posent des questions à ce sujet ?

Sujet II :

Dégagez avec précision les principaux problèmes que soulève la citation suivante et commentez :

"En voulant retenir les jeunes en milieu rural, les âmes de bonne volonté ne cessent de défigurer la ville, au point de ne voir en elle qu'un milieu négatif, le lieu des valeurs destructrices des personnes et des groupes. On tend à faire croire que le processus d'urbanisation est un processus de "détritorialisation" et de désorganisation. La ville serait le lieu de déracinement, de l'anonymat, de la solitude et de la superficialité. C'est là que l'Africain tend à perdre son "authenticité" et son identité propre".

Jean-Marc ELA

La ville en Afrique Noire, Karthala, 1983

Sujet III :

Pour présenter la situation économique, politique et sociale en Afrique, des auteurs contemporains ont publié des ouvrages aux titres fort significatifs : "L'Afrique Noire est mal partie", "L'Afrique peut-elle partir", "Et si l'Afrique refusait le développement", etc. Que pensez-vous des différentes positions ainsi exprimées ? Comment pourriez-vous caractériser la situation globale de l'Afrique à la veille du 21^e siècle ?

Exercice 1 : (2,5 pts)

Dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, l'application linéaire f est telle que :

$$f(\vec{i} + \vec{j}) = \vec{k} \quad f(\vec{i} - \vec{j}) = \vec{j} + \vec{k} \quad f(\vec{k}) = \vec{i} - \vec{k}$$

- 1) Calculer $f(\vec{i})$ et $f(\vec{j})$
- 2) Faire la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
- 3) Déterminer l'ensemble des vecteurs $\vec{v}$ tel que $f(\vec{v}) = -\vec{v}/2$;
- 4) On donne les deux matrices A et B telles que :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Montrer que la matrice B est l'inverse de la matrice A .

Exercice 2 : (3 pts)

- a) Etudier la variation de la fonction :

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{x}{1-x} \quad 0 \leq x \leq 1$$

appelée fonction logit et utilisée en démographie pour l'étude de la mortalité.

- b) Si entre $f(y)$ et $f(x)$ existe la relation $f(y) = af(x) + b$, en déduire une relation entre y et x .

Exercice 3 : (2,5 pts)

On donne le polynôme $P(x) = x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4$

- 1) Montrer que $(1 + j)$ est au moins racine double de $P(x)$ (avec $j^2 = -1$).
- 2) Pourquoi peut-on en déduire sans aucun calcul la factorisation complète de $P(x)$ dans $\mathbb{C}[x]$?

- 1) Factoriser $P(x)$ dans $\mathbb{C}[x]$, en déduire la factorisation de $P(x)$ dans $\mathbb{R}[x]$.

Exercice 4 : (3 pts)

L'effectif d'une population s'accroît suivant la courbe logistique :

$$P(t) = \frac{a}{1 + e^{-r(t-t_0)}}$$

où a est l'effectif maximal que cette population peut atteindre,
 r le taux d'accroissement initial de la population,
 et t_0 l'époque où l'effectif $a/2$ est atteint.

- a) Déterminer les paramètres a , r et t_0 pour une population dont l'effectif évoluerait comme suit :

- en 1830 : 2,876 millions d'habitants
- en 1880 : 4,572 millions d'habitants
- en 1930 : 6,131 millions d'habitants

- b) Etudier la variation de cette fonction.

Exercice 5 : (4,5 pts)

A) On considère la fonction y définie par :

$$y: x \mapsto f(x) = \ln \frac{x}{x^k}$$

- 1) Calculer :

$$\int_2^b f(x) dx, \quad \text{lorsque } b \text{ tend vers plus l'infini.}$$

- 2) Préciser brièvement la nature de la série de terme général

$$U_n = \ln \frac{n}{n^k}$$

- 3) Etudier la fonction y pour $k=2$ et construire son graphique.

- 4) Si étant la somme de la série de terme général $U_n = \log(n/n^2)$ et S_n la somme de ses n premiers termes, montrer que $S_n + (1 + \log n)/n$ est une valeur approchée de S par excès.

- B) $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, montrer que la fonction

$$F_n(a) = \int_0^b \frac{dt}{(a^2 + t^2)^n} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{a^{2n-1}} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2)} \quad \text{avec } F_1(a) = \frac{\pi}{2a}$$

lorsque b tend vers plus l'infini.

- C) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle (de la variable n) suivante :

$$U_n = \frac{n^2 + 9n + 5}{(n+1)(2n+3)(2n+5)(n+4)}$$

et en déduire $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_{n-1} + U_n + U_{n+1}$

Exercice 6 : (4,5 points)

- A) Étant donné n nombres positifs $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ et un nombre réel quelconque k , on appelle moyenne potentielle pondérée d'ordre k la quantité :

$$M_k = (p_1 x_1^k + p_2 x_2^k + p_3 x_3^k + \dots + p_n x_n^k)^{\frac{1}{k}}$$

où $p_i \geq 0$ pour tout $i = 1, 2, 3, \dots, n$ et $p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$.

- 1) Montrer que : $M_n = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots + x_n p_n$

- 2) On considère la fonction de production :

$$P(K, L) = a [bK^c + (1-b)L^c]^{\frac{1}{c}}$$

- Donner l'expression de $P(K, L)$ quand c tend vers 0.
- Donner l'expression de $P(K, L)$ quand $c = 1$ puis quand c tend vers plus l'infini.

A quantités égales de capital k et de travail l quelle relation d'ordre lie la fonction $Q(K, L) = a K^b L^{1-b}$ dite de Cobb-Douglas à la fonction de production $P(K, L)$ quand $c = 1$ et quand c tend vers plus l'infini.

- 3) 1) Calculer le maximum de $x^p y^q z^r$ lorsque $ax + by + cz = k$ (k étant une constante positive) où x, y, z, p, q, r, a, b et c sont des nombres positifs.

- 2) Application : Calculer le maximum de $x^2 y^3 z^2$ lorsque $x + y + z = 24$.

UNIVERSITÉ DE TIOUNDELI
INSTITUT DE FORMATION ET DE
RECHERCHE DÉMOGRAPHIQUES
(I.F.O.R.D.)

Avril 1999

CONCOURS DE RECRUTEMENT

EPREUVE DE PROBABILITÉS ET STATISTIQUE

(Concours B)

Durée : 1 heures

AUCUN DOCUMENT N'EST AUTORISÉ

Barème indicatif :

Exercice 1 : 5 points
Exercice 2 : 3 points
Exercice 3 : 2 points
Exercice 4 : 4 points
Exercice 5 : 6 points

- a) Quelle est le nombre moyen de clientes par jour ouvrable (1 jour ouvrable compte heures de travail).

Note : la probabilité qu'une cliente se présente à la réception au cours de 15 minutes est 0. Le nombre moyen de client par jour ouvrable est donné par α avec $(\alpha \cdot \Delta t) = 0.25$ et $\Delta t = 15$ minutes ou $1/4$ d'heure.

- b) Quelle est la loi de probabilité qui régit le nombre de clientes arrivant au service planification familiale pendant 1 jour ouvrable (8 heures de travail).
- c) Quelle est la probabilité qu'il se présente 10 clientes à la réception au cours d'une journée de travail.
- d) Quelle est la probabilité qu'il se présente entre 10 et 15 clientes par jour.

Exercice 3 (2 pts)

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes et continues, uniformément distribuées sur le segment $[0, 1]$. On définit deux nouvelles variables X et Y par : $X = X_1 + X_2$ et $Y = X_1 - X_2$.

- 1) Déterminer la loi de X et la loi de Y .

Quelle est la loi du couple (X, Y) ?

Exercice 4 (4 pts)

Dans le cadre du programme de planification familiale exécuté dans un pays A, le pouvoir politique en place adopte un décret interdisant la procréation chez la femme qui a atteint naissances vivantes. On désigne par N le nombre de naissances nécessaires pour voir finalement la femme accoucher des jumeaux.

- 1) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire N en l'absence du décret. On admettra que la fécondité biologique maximale est de 16 naissances vivantes.
- 2) Calculer l'espérance mathématique et la variance de N en l'absence du décret.
- 3) Quelle est la probabilité pour qu'une femme restée en conformité avec le décret le voie finalement à l'issue d'un accouchement ?
- 4) Quelle est la probabilité pour qu'une femme accouche des jumeaux tout en restant conforme au décret ?

Sachant que le rapport de masculinité à la naissance (nombre de garçons sur nombre de filles) est de 105 % dans le pays A. On désigne par G la variable aléatoire représentant le nombre de naissances nécessaires pour voir finalement la femme accoucher d'un garçon.

- 5) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire G en l'absence du décret, et en déduire l'espérance mathématique et la variance de G .
- 6) Quelle est la probabilité pour qu'une femme ait plus de garçons que des filles tout en restant conforme au décret.

Exercice 5 : (6 pts)

L'accès au premier emploi du secteur moderne à Yaoundé est une variable aléatoire T qui dépend du temps mis sur le marché de l'emploi. Soit $S(t)$ la fonction cumulative représentant la probabilité pour qu'un individu se retrouve sans emploi à l'issue du temps t , et $q(t)$ la probabilité pour que l'individu obtienne son premier emploi entre l'instant t et l'instant $t+dt$ sachant qu'il ne l'avait jamais obtenu à l'instant t .

- 1) Exprimer $q(t)$ en fonction de $S(t)$.
- 2) Si $s(t)$ désigne la densité de probabilité de la variable aléatoire T , déterminer en fonction de $s(t)$, la probabilité instantanée $q(t)$ d'accès au premier emploi à l'instant t .
- 3) Calculer la probabilité $Q(t)$ de voir l'individu déjà accédé au premier emploi avant l'instant t .
- 4) Exprimer, à l'inverse, $S(t)$ et $s(t)$ en fonction de $Q(t)$.

Le calendrier d'entrée dans la vie active moderne à Yaoundé est décrit par le tableau 2.

- 5) Calculer en moyenne le temps mis par les hommes ainsi que les femmes pour accéder au premier emploi du secteur moderne.
- 6) Au vu des résultats du tableau 2, peut-on affirmer, au seuil de 5 %, que les hommes entrent plus rapidement en activité moderne que les femmes ? Préciser les hypothèses ainsi que le test statistique à effectuer, puis procéder aux calculs.

Tableau 1 : Caractéristiques des enfants à l'enquête (âge, poids et taille).

AGE (en mois)	POIDS (en grammes)	TAILLE (en centimètre)
51	19.9	113.4
6	5.8	63.2
4	8.0	66.4
32	8.5	72.9
46	11.8	89.3
21	9	76.5
57	14.6	96.4
22	11.5	82.6
33	10.2	85.6
38	13.0	90.5
58	16.64	107.2
14	11.7	81.6
2	5.5	55.5
6	6.6	62.8
17	11.0	78.7
2	5.3	60.5
33	11.5	82.1
7	6.8	72.2
26	8.2	79.1
13	7.4	67.8
12	6.9	69.8
22	7.0	67.9
49	10.8	82.2
6	5.6	62.3
8	7.2	65.2
6	5.8	66.4
14	8.4	74.1
32	8.4	75.5
20	6.2	70.6
45	10.2	84.3

Source : Enquête Démographique et de Santé du Cameroun 1991.

Tableau 2 : Probabilité de rester sans emploi moderne par sexe et par âge.

Age à l'événement	Hommes	Femmes
12.000	1.000	1.000
12.667	1.000	1.000
13.333	0.985	1.000
14.000	0.985	1.000
14.667	0.985	1.000
15.333	0.985	1.000
16.000	0.969	1.000
16.667	0.969	1.000
17.333	0.969	1.000
18.000	0.952	1.000
18.667	0.952	1.000
19.333	0.952	1.000
20.000	0.917	1.000
20.667	0.899	1.000
21.333	0.899	1.000
22.000	0.880	1.000
22.667	0.861	0.982
23.333	0.861	0.982
24.000	0.842	0.982
24.667	0.823	0.982
25.333	0.823	0.982
26.000	0.803	0.982
26.667	0.803	0.982
27.333	0.803	0.964
28.000	0.762	0.946
28.667	0.762	0.946
29.333	0.720	0.928
30.000	0.699	0.910
30.667	0.699	0.910
31.333	0.699	0.892
32.000	0.676	0.855
32.667	0.654	0.837
33.333	0.631	0.837
34.000	0.586	0.818
34.667	0.541	0.813
35.333	0.518	0.798
36.000	0.496	0.798
36.667	0.496	0.798
37.333	0.496	0.798
38.000	0.471	0.798
38.667	0.471	0.798
39.333	0.445	0.798
40.000	0.445	0.777
40.667	0.445	0.756