

INSTITUT DE FORMATION ET DE RECHERCHE DÉMOGRAPHIQUES

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

(Concours type A (Mars 2009))

Exercice 1

- Déterminer à partir de la limite ci-dessous, la formule permettant de calculer le taux d'accroissement d'une population humaine. En déduire l'expression de $P(t)$ entre les instants 0 et t en fonction de t .
- Montrez que lorsque r est petit et constant c'est-à-dire $r(t) = r$, l'expression $P(0)(1+r)^t$ est une approximation de $P(t)$. En d'autres termes : $P(t) \approx P(0)(1+r)^t$

$$r(t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{P(t+dt) - P(t)}{P(t)dt}$$

où $P(t)$ est l'effectif de la population en t et dt l'accroissement entre les instants t et $t+dt$.
On utilisera la définition suivante : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} = f'(x)$

Exercice 2

On considère l'espace vectoriel des fonctions polynômes P et P_n le sous-espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n ($n \in \mathbb{N}^*$). Pour tout entier n supérieur ou égal à 2 on définit les fonctions polynômes ci-après.

$$U_0(x) = P_0(x) = 1, \quad n \geq 2$$

$$U_n(x) = (x^2 - 1)^n$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^{(n)}}{dx^n} U_n(x)$$

$$\text{Par ailleurs, soit } L_n = \frac{d}{dx} \left[(x^2 - 1) \frac{dP}{dx} \right].$$

- Calculer directement P_1 , P_2 et P_3 et vérifier les relations :

$$U'_{n+1}(x) - 2(n+1)xU_n(x) = 0 \quad (1)$$

$$(x^2 - 1)U'_{n+1}(x) - 2nxU_n(x) = 0 \quad (2)$$

- En dérivant $n+1$ fois (1) et (2), montrer que la suite (P_n) vérifie :

$$P'(n+1)(x) = xP'_n(x) + (n+1)P_n(x)$$

$$L_n(P_n) = n(n+1)P_n$$

Exercice 3

La fonction ci-après est utilisée par les démographes pour ajouter les taux de fécondité par âge dans les pays où le niveau de ce phénomène est élevé :

$$f(x) = k(x - \alpha)(\beta - x)^2 \text{ avec } \alpha \leq x \leq \beta.$$

On pose :

$$\begin{aligned} \text{a) } D &= \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \\ \text{b) } \bar{x} &= \frac{\int_{\alpha}^{\beta} x f(x) dx}{D} \\ \text{c) } \sigma &= \sqrt{\frac{\int_{\alpha}^{\beta} x^2 f(x) dx}{D} - \bar{x}^2} \end{aligned}$$

1. En utilisant les évidentes égalités : $(x - \alpha) = -(\beta - x) + \beta - \alpha$ et $x^2 = (\beta - x)^2 + 2\beta x - \beta^2$, montrer sans recourir à la méthode d'intégration par partie, ni développer les polynômes sous la forme : $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, que :

$$\text{(a) } D = \frac{k(\beta - \alpha)^2}{12}$$

$$\text{(b) } \bar{x} = \frac{3\alpha + 2\beta}{5}$$

$$\text{(c) } \sigma^2 = \frac{(\beta - \alpha)^2}{25}$$

2. On suppose maintenant que pour une population étudiée les valeurs de ces grandeurs sont : $D = 7,06$ enfants par femme en moyenne, $\bar{x} = 31,33$ ans et $\sigma^2 = 52,76$.

Estimer les valeurs numériques correspondantes des paramètres k , α et β ?

Exercice 4

On désigne par (δ) l'ensemble des nombres réels différents de -1 et de $+1$ et $y = f(x)$, la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^3 - 9x}{2(x^2 - 1)}$

1. Montrer que $f(x)$ est impaire. Que peut-on dire de la position de la courbe (C) de cette fonction par rapport au point $O(0,0)$. Tracer la courbe pour $x \geq 0$, puis la compléter en utilisant une propriété de la fonction.
2. Les restrictions de f à $] -\infty, -1[$, $] -1, +1[$ et $] +1, +\infty[$ sont-elles des bijections ? Pourquoi ?
3. Soit $a \in (\Delta)$, montrons que : a , $\frac{a-3}{a+3}$ et $-\frac{a+3}{a-1}$ sont les 3 solutions de l'équation $f(x) = f(a)$.

Exercice 5

On considère la fonction « Gamma » qui associe à tout nombre réel r positif le nombre $\Gamma(r)$ défini par l'intégrale : $\Gamma(r) = \int_0^{+\infty} x^{r-1} e^{-x} dx$.

1. Montrer que pour tout nombre réel r positif $\Gamma(r+1) = r\Gamma(r)$.

2. Calculer $\gamma(1)$ et en déduire $\Gamma(n+1)$ pour n entier positif.
3. Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} \frac{1}{2\Gamma(n/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{(n/2)-1} e^{-x/2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Calculer les deux primitives suivantes : $E = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ et $V = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - E^2$

4. Étant donné deux nombres réels positifs a et b , exprimer $\Gamma(a)$ et $\Gamma(b)$ respectivement en fonction des variables t et u déduites de la variables x par les relations $x = t^2$ et $x = u^2$.

Exercice 6

Sachant que les nombres positifs x et y sont liés par la relation $x + y = 6$, calculer la valeur extrême (maximale ou minimale) de

1. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$
2. xy
3. $x^2 + y^2$
4. $x^3 + y^3$.

Exercice 7

On considère la matrice suivante : $M = \begin{pmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{pmatrix}$

Où a, b et c sont des réels.

Sans le développer, mettre le déterminant de la matrice M sous la forme de produit de facteurs puis calculer sa valeur. (Si nécessaire, on pourra soustraire successivement une colonne à une autre et multiplier par certaines quantités).

CONCOURS IFORD (Mars 2009) : CORRIGÉE ÉPREUVE MATHÉMATIQUES

type A

Exercice 1

1. Formule de calcul du taux d'accroissement d'une population humaine et déduction de l'expression de $P(x)$ entre les instants 0 et t

$$r(t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{P(t+dt) - P(t)}{P(t)dt} \Rightarrow r(t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\frac{P(t+dt) - P(t)}{dt}}{P(t)}$$

INSTITUT DE FORMATION ET DE RECHERCHE DÉMOGRAPHIQUES

ÉPREUVE DE PROBABILITÉS - STATISTIQUES

(Concours type A (Mars 2009))

Exercice 1

Une expérience consiste à jeter en l'air trois pièces de monnaie et d'observer à la fin du jet la face supérieure présentée par chacune des trois pièces au repos. On note pile (P) ou face (F) pour chacune d'elle.

En supposant qu'aucune de ces trois pièces n'est truquée calculer la probabilité d'avoir :

1. Au moins un pile ;
2. Exactement trois piles ;
3. Exactement deux piles ;
4. Deux piles ou deux faces.

Exercice 2

1. Un estimateur biaisé peut-il être efficace qu'un estimateur non biaisé ? Justifier la réponse.
2. Q'est-ce qui distingue une variable continue d'une variable discrète ?
3. A quelle loi de probabilité peut-on associer la loi de distribution de la « nombre de naissance vivantes d'une femme en âges de procréer sur une certaine période » ?
4. Soit Z une variable suivant une loi normale centrée réduite. Calculer les probabilités suivantes :

$$P(Z < 0,81)$$

$$P(Z > 1,96)$$

$$P(Z < -1,96)$$

Exercice 3

Une chaîne de fabrication produit 40 000 fours dont 32 000 (80%) sont bons, ne nécessitant donc aucune modification. Le service de contrôle-qualité qui ne connaît pas ces chiffres, prélève un échantillon aléatoire de ces fours pour estimer la qualité de l'ensemble de la fabrication.

Quelle est la probabilité que dans cet échantillon on obtienne 5 fours défectueux et 5 fours bons ?

Exercice 4

On donne pour un ensemble de naissance ayant eu lieu au Canada en 1974 la distribution selon l'âge de la mère (X) et l'état du bébé (Y).

Age de la mère (ans) :	<20	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45 et +
Naissance vivantes :	38626	111409	119239	48142	14133	3333	226
Mortinaissances : 316	757	836	402	232	81	10	

1. Présenter ces données sous forme de tableau de contingence.
2. Présenter la distribution des fréquences conjointes.
3. Déterminer les distributions conditionnelles de X étant donné les valeurs de Y .
4. On suppose qu'une femme ne peut pas donner naissance à un enfant avant 15 ans et après 50 ans.
 - (a) Présenter la distribution marginale de X et calculer la moyenne et la variance marginale.
 - (b) Calculer l'âge moyen des mères qui ont eu des naissances vivantes ainsi que celui de celles qui ont eu des morts-nés.
5. Commenter les résultats.

Exercice 5

Le tableau 1 donne la répartition des femmes âgées de 15-49 ans lors d'une enquête réalisée dans un pays africain en 1998 selon la pratique contraceptive au moment de l'enquête (Y) et le niveau d'instruction (X).

1. Compléter le tableau 1
2. Présenter la distribution des fréquences conjointes.
3. Si on désigne par taux de prévalence contraceptive quelconque le pourcentage des femmes qui utilisent une méthode contraceptive quelconque (traditionnelle ou moderne) au moment de l'enquête.
 Déterminer ce taux pour l'ensemble des femmes et pour les femmes de chaque niveau d'instruction.
 Quelle relation peut-on présumer entre le taux de prévalence contraceptive quelconque et le niveau d'instruction ? Commenter votre réponse.
4. De même, si on désigne par taux de prévalence contraceptive moderne le pourcentage des femmes qui utilisent une méthode contraceptive moderne au moment de l'enquête et par taux de prévalence contraceptive traditionnelle le pourcentage des femmes qui utilisent une méthode contraceptive traditionnelle au moment de l'enquête.

Calculer pour les femmes de chaque niveau d'estimation le taux de prévalence de chaque type de méthode. La relation trouvée en a) entre la pratique contraceptive et le niveau d'instruction est-elle maintenue quel que soit le type de méthode ? Commenter votre réponse.

TABLEAU 1. répartition des femmes âgées de 15-45 ans selon la pratique contraceptive et le niveau d'instruction dans un pays africain en 1998

Pratique contraceptive	Niveau d'instruction			Total
	Aucune instruction	Primaire	Secondaire ou +	
Aucune méthode	1497		998	4181
Méthode traditionnelle		288		880
Méthode moderne	28	148	264	
Total	1548	2122	1831	5501

Exercice 6

Une firme spécialisée dans l'étude des marchés peut estimer le montant moyen μ d'argent dépensé par mois par les étudiants du premier cycle universitaire. Un échantillon aléatoire de 144 étudiants donne les résultats suivants : $\bar{X} = \$190$, $s = \$30$

1. Donner une estimation ponctuelle pour μ .
2. Construire un intervalle de confiance pour μ avec un niveau de confiance de 95%.
3. Quelle taille d'échantillon serait nécessaire si on veut estimer μ avec une marge d'erreur $e = \pm 3$ autour de la moyenne et au seuil de 5% ? On rappelle la formule suivante : $e^2 = \frac{Z_{\alpha/2}^2 S^2}{n}$ où Z suit une loi normale centrée réduite.

CONCOURS IFORD (Mars 2009) : CORRIGÉE ÉPREUVE PROBABILITÉS - STATISTIQUES type A

Exercice 1

Soit A l'ensemble fondamental associé à cette expérience.

$$A = \{(P, P, P); (P, P, F); (P, F, P); (F, F, F); (P, F, F); (F, P, P); (F, F, P); (F, P, F)\}$$

Card $A=8$

En supposant qu'aucune de ces trois pièces n'est truquée calculons la probabilité d'avoir :

1. Au moins un pile ;

Soit A_1 l'ensemble associé à tel événement

$$A_1 = \{(P, P, P); (P, P, F); (P, F, P); (P, F, F); (F, P, P), (F, F, P), (F, P, F)\}$$