**INSTITUT DE FORMATION ET DE RECHERCHE DÉMOGRAPHIQUES**

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

(Concours type A (Mars 2008))

## Exercice 1

On considère une population $P$ ayant un taux d'accroissement naturel moyen constant $r$. On désigne par $P_0$ l'effectif de cette population à la date de la première observation $t = 0$.

1. Calculer $P_1, P_2, P_3$ et $P_4$.
2. En déduire que la population $P$ croît suivant une suite géométrique dont on déterminera la raison.
3. On appelle temps de doublement d'une population le temps $t$ tel que $P_t = 2P_0$. Calculer $t$.
4. Application numérique : Calculer le temps de doublement de populations dont les taux d'accroissement naturels annuels moyen sont les suivants : 0,1 ; 0,5 ; 1,0 ; 1,5 ; 2,0 ; 2,5 ; 2,7 ; 3,0 et 4,0

## Exercice 2

On considère la suite de Fibonacci $(u_n)_{n\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

1. Calculer les termes de cette suite jusqu'a $u_{10}$
2. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^n$
3. En déduire que deux termes consécutifs de la suite $(u_n)_{n\mathbb{N}}$ sont toujours premiers entre eux.
4. Démonter que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N}^* \; u_{n+p} = u_n u_{p-1} + u_{n+1}u_p$

## Exercice 3

Soit $P \in R(X)$ tel que $p = X^4 + X^2 + 1$.

1. Décomposer $P$ en produit de facteurs irréductibles dans $R(X)$.
2. Décomposer en éléments dans $R(X)$ les fractions :
   (a) $F = \dfrac{2X^2 + 3}{(X^2 + X + 1)^2}$
   (b) $G = \dfrac{1}{X(X^4 + X^2 + 1)}$
   (c) $H = \dfrac{1}{(X^4 + X^2 + 1)^2}$

**Exercice 4**

On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Soit $\lambda$ un réel. Démontrer que la matrice $A-\lambda I$ est inversible si et seulement si $\lambda \notin \{-1, 2\}$. $I$ est la matrice unité.
2. Calculer $(A-I)(A-2I)$
3. En déduire la matrice $A^n$ pour $n \in \mathbb{N}$

**Exercice 5**

1. Soit la fonction $f$ définie par $f(x) = (x^3-2)^n \quad n \in \mathbb{N}^*$
   (a) Calculer $f'(x)$ et montrer que $(x^3-2)f'(x) - 3nx^2 f(x) = 0$
   (b) En déduire que l'on a : $(x^3-2)f'''(x)+3x^2(2-n)f'(x)+6x(1-2n)f'(x)-6nf(x) = 0$
2. On donne $f(x) = \dfrac{1-x^n}{1-x}$. Calculer $f'(x)$.
3. En déduire l'expression de $g(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^n$.

**Exercice 6**

On considère la suite $(v_n)$ $n \geq 1$ définie par : $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$ pour tout entier $n > 0$.

1. Montrer que la suite de terme générale $V_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ tend vers $+\infty$.
2. Montrer que $v_n \leq \dfrac{2}{1-2u_1^2} u_n$.
3. En déduite le comportement de la suite de terme générale $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.
4. Montrer que la suite $(w_n)_{n\geq 1}$ définie par $w_n = \dfrac{1}{u_{n-1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}$ pour tout $n > 0$, converge vers 4.

**Exercice 7**

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{-x+4}{2x-4}$

1. Trouver par étude directe, les valeurs de $x$ pour lesquelles $f(x)$ reste comprise dans l'intervalle $-1$ et $+1$.
2. Tracer la courbe $C$ représentative des variations de $f(x)$ et vérifier les résultats de la question (a).
3. Vérifier que le produit des valeurs que prend $f(x)$ pour deux valeurs quelconques de $x$ ayant pour comme 6 est constant.

**INSTITUT DE FORMATION ET DE RECHERCHE DÉMOGRAPHIQUES**

ÉPREUVE DE PROBABILITÉS - STATISTIQUES

(Concours type A (Mars 2008))

**Exercice 1**

Soit $(X_1, X_2 \ldots, X_n)$ un échantillon de taille $n$ dont la variable parenté suit une loi binomiale de paramètre $n$ et $p$

1. Calculer $E(\overline{X})$ et $V(\overline{X})$
2. On pose $f_n = \dfrac{X}{n}$, calculer $E(f_n)$ et $V(f_n)$.
3. On pose ${\sigma'}^2 = \frac{1}{n}\sum(X_i - \overline{X})^2$
   (a) Calculer $E({\sigma'}^2)$.
   (b) Déterminer la limite de $E({\sigma'}^2)$ lorsque $n \to +\infty$.

**Exercice 2**

Soit $X$ ne variable statistique définie sur 1000 individus. La foncions de fréquence cumulée de $X$ est définie ainsi :

$F(X) = 0$ si $X < -3$

$F(X) = 0,10$ si $-3 \leq X < 2$

$F(X) = 0,45$ si $2 \leq X < 5$

$F(X) = 0,85$ si $5 \leq X < 10$

$F(X) = 1$ si $10 \leq X$

1. Combien de valeur différentes $X$ prend-t-elle ?
2. Pour combien d'individus $X$ prend-t-elle la valeur 2 ?
3. Quelle est la moyenne de $X$ ?
4. Quelle est la variance de $X$ ?

**Exercice 3**

On considère une famille de 2 enfants. On suppose que les probabilité d'avoir un enfant de sexe masculin ou un enfant de sexe féminin sont équiprobables. On définir les événements suivants :

- D : « les deux enfants sont de sexe différents » ;
- H : « la famille a un garçon » ;
- A : « l'aîné est un garçon » ;
- B : « les deux enfants sont des garçons ».

1. Calculer les probabilité de survenances des événements D ; H ; A et B
2. Calculer les probabilités conditionnelles $P(B/H)$ et $P(B/A)$.

**Exercice 4**

1. Une urne contient $N_1 = 3$ boules rouges, $N_2 = 2$ boules noires et $N_3 = 2$ boules blanches. On tire de cet urne 2 boules sans remise. quelles sont les probabilité attachées aux diverses répartitions possibles ?
2. Reprendre le calcul des probabilités de la question 1) pour un tirage bernoullien.

**Exercice 5**

Le tableau ci-dessous donne les notes (sur un total de 10) d'une classe de 50 étudiants à l'issue s'une composition en statistique.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 5 | 6 | 2 | 8 | 7 | 6 | 7 | 2 | 6 |
| 3 | 9 | 10 | 4 | 5 | 5 | 4 | 6 | 8 | 3 |
| 7 | 4 | 8 | 2 | 3 | 5 | 6 | 7 | 10 | 5 |
| 9 | 8 | 2 | 4 | 7 | 9 | 4 | 6 | 4 | 9 |
| 7 | 8 | 3 | 6 | 7 | 9 | 10 | 5 | 7 | 10 |

1. Arranger ces notes dans un tableau de fréquences en allant de la plus faible à la plus élevée. Calculer les fréquences absolues et les fréquences relatives de la variable aléatoires discrète ainsi constituée. Calculer les fréquences cumulées.
2. Calculer l'étendue, la moyenne, la médiane et l'écart-type de cette variable.
3. Transformer la variable aléatoires discrète en une variable aléatoires continue en créant des classes autour des valeurs discrètes moyennes (centres de classes, exemple 1,5, 2,5, etc). Compléter le tableau de fréquences en calculant les fréquences absolues, relatives et cumulées. Calculer la moyenne et l'écart-type.
4. Représenter l'histogramme des fréquences relatives et la courbe des fréquences cumulées.

**Exercice 6**

Dans les failles de 6 enfants, on appelle $X$ le nombre de garçons. On suppose que les naissances sont indépendantes et que la probabilité d'avoir un garçon à chaque naissance est de 0,52.

1. Calculer la moyenne et l'écart-type de $X$.
2. Parmi toutes les famille de 6 enfants, quelle est la probabilité de celle comprennent :
   (a) trois garçons et trois filles (répartition égale des deux sexes) ?
   (b) une répartition presque égale des deux sexes : 3-3 ou 4-2 ?
   (c) trois garçons ou plus.

**Exercice 7**

Soit $a$ et $b$ deus entiers strictement positifs ; Soit $X$ une variable aléatoires discrète à valeurs entières strictement positive telle que :

$P(X = n) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ si $1 \leq a \leq ab$.

$P(X = n) = 0$ si $n > ab$.

1. Quelle condition doivent vérifier $a$ et $b$ pour que la suite de terme générale $P_n = P(X = n)$ puise être considérée comme la loi de probabilité de $X$ ?
2. Déterminer la fonction de répartition $F(n)$ de $X$ puis tracer son graphe.
3. Quelle sont les solutions de l'équation $F(n) = \frac{1}{2}$ ?
4. Calculer $E(X)^2$
5. Quelles valeurs doit-on donner à $a$ et $b$ pour que l'on ait $E(X) = \frac{7}{2}$ ?

---

**CONCOURS IFORD (Mars 2008) : CORRIGÉE ÉPREUVE ÉPREUVE DE type A**

---

**Exercice 1**

Soit $(X_1, X_2 \ldots, X_n)$ un échantillon de taille $n$ dont la variable parenté suit une loi binomiale de paramètre $n$ et $p$

1. Calculons $E(\overline{X})$ et $V(\overline{X})$

   $E(\overline{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum X_i\right) = \frac{1}{n}\sum E(X_i)$

   or $E(X_i) = np \ \forall i \Rightarrow E(\overline{X}) = \frac{1}{n}\sum np = \frac{1}{n}n \times np = np$

   $\boxed{E(\overline{X}) = np}$

   $V(\overline{X}) = V\left(\frac{1}{n}\sum_i X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_i V(X_i)$ car échantillon Bernouilien implique indépendant.

   Or $V(X_i) = np$, $\forall i$ avec $q = 1 - p$

   d'où $V(\overline{X}) = \frac{1}{n^2}\sum npq = \frac{1}{n^2}n \times npq = pq$

   $\boxed{V(\overline{X}) = pq = p(1-p)}$

2. On pose $f_n = \dfrac{X}{n}$, calculons $E(f_n)$ et $V(f_n)$.

   $E(f_n) = E\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n}E(X) = \frac{1}{n}np = p$

   $\boxed{E(f_n) = p}$

   $V(f_n) = V\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{x^2}V(X) = \dfrac{npq}{n^2} = \dfrac{pq}{n}$

   $\boxed{V(f_n) = \dfrac{pq}{n} = \dfrac{p(1-q)}{n}}$