

INSTITUT DE FORMATION ET DE RECHERCHE DÉMOGRAPHIQUES
ÉPREUVE DE PROBABILITÉS - STATISTIQUES
(Concours type A (Mars 2007))

Exercice 1

Une urne contient 10 boules de deux sortes : blanches et noires. On fait 1 000 tirages avec remise. On obtient 420 fois une boules noire. Estimer le nombre de boules noirs dans l'urne.

Exercice 2

N personnes déposent leur chapeau au vestiaires avant une réunion. A l'issue de celle-ci, survient une panne d'électricité et chacune personne prend un chapeau au hasard. Quelle est la probabilité que r personnes exactement retrouvent leur chapeau.

Exercice 3

Un examen consiste en un questionnaire à choix multiples de 12 questions, correspondant chacune à 5 réponses possibles. Pour être reçu, il faut répondre correctement à 8 questions au moins sur les 12. Quelle est la probabilité d'être reçu à l'examen :

1. Si on se présente sans avoir rien appris et si on répond au hasard ?
2. Si on a travaillé suffisamment pour pouvoir éliminer 3 réponses à chaque question, et si on choisit au hasard entre les 2 réponses restantes ?
3. Si on a travaillé suffisamment pour pouvoir répondre de façon exacte à deux questions et pour les 10 questions on choisit la réponse au hasard ?

Exercice 4

Un représentant d'un grand laboratoire fabriquant des produits pharmaceutiques téléphone à une pharmacie trois fois par an. À chaque appel, il a 80 chances sur 100 de réaliser une vente. Soit X le nombre total de ventes par an (0,1,2 ou 3).

1. Présenter sous forme de tableau la distribution de probabilité de probabilité $P(X)$.
2. Tracer le graphe de $P(X)$.
3. Quelle est la probabilité de réaliser au moins 2 ventes ?

Exercice 5

Dans deux sous-populations d'un pays africain, le tableau 1 donne en 1998 la répartition des femmes âgées de 15-49 ans en union ayant déjà eu au moins une naissance vivante selon l'âge à la première naissance.

1. Déterminer pour chaque sous-population la distribution des fréquences et tracer l'histogramme des fréquences.
2. Si on suppose qu'une femme qui a eu sa première naissance avant l'âge de 19 ans a commencé sa maternité de façon précoce, déterminer pour chaque sous-population le pourcentage des femmes qui ont commencé leur maternité précocement.
3. De même, si on suppose qu'une femme qui a eu sa première naissance après 26 ans a commencé sa maternité de façon tardive, déterminer pour chaque sous-population le pourcentage des femmes qui ont commencé leur maternité tardivement.
4. Déterminer pour chaque sous-population les âges moyen et médian à la première maternité ainsi que l'écart-type.
5. Commenter les résultats.

TABLEAU 1 Répartition des femmes de 15-49 ans en union ayant déjà eu au moins une naissance vivantes selon l'âge à la première naissance dans deux sous-populations d'un pays africain en 1998.

Âge à la naissance	Effectif des femmes	
	Sous-population A	Sous-population B
12-14 ans	20	30
15-18 ans	192	250
19-22 ans	199	134
23-26 ans	66	21
27-39 ans	17	3
Total	494	438

**CONCOURS IFORD (Mars 2007) : CORRIGÉE ÉPREUVE DE PROBABILITÉS
- STATISTIQUES type A**

Exercice 1

θ = probabilité d'obtenir une boule noire

$1 - \theta$ = probabilité d'obtenir une boule blanche. A chaque tirage ie $\mathcal{B}(1, \theta)$

INSTITUT DE FORMATION ET DE RECHERCHE DÉMOGRAPHIQUES
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
(Concours type A (Mars 2007))

Exercice 1

1. Étudier la parité de la fonction $f(x) = x^n - 2x$ sachant que n est un entier naturel.
2. Soit $F(x)$ la partie d'un réel positif x et $f(x) = x - E(x)$. $f(x)$ est-elle périodique ? si oui déterminer sa période.

Exercice 2

1. Donner l'équation générale des droites passant par $P(1;2)$ et ayant pour pente m .
2. Soit la droite d d'équation $3y - 4x + 2 = 0$. Déterminer la pente de d et celle des droites qui lui sont perpendiculaire.
3. Quelle est l'équation de la droite d' perpendiculaire à d et passant par p ?
4. Quelle sont les coordonnées du point Q commun aux droites d et d' ?
5. Calculer la distance euclidienne entre P et Q .

Indication la distance euclidienne entre $A(x_1, y_1)$ et $B(x_2, y_2)$ s'obtient par la formule suivante $d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Exercice 3

Soit y une fonction réelle donnée par l'expression suivante : $y = \frac{2x^3 - 5x^2 + 4}{x^2 - 4}$

1. Quelle est l'asymptote oblique de y ?
2. Si z est l'asymptote cherchée donner l'expression de la distance $d(x)$ entre y et z .

Exercice 4

Parmi 10 000 naissances nouveaux-nés. 8 000 survivent à 30 ans et 500 survivent à 80 ans.

Déterminer par interpolation polynomiale le nombre de survivant à 50 ans.

Indication On peut assimiler la courbe de survie à une fonction du second degré $y = ax^2 + bx + c$.

Exercice 5

Lors d'une promenade, un groupe de 5 garçons et 4 fille dispose de deux voitures : l'une de 5 places, l'autre de 4 places.

1. De combien d façon différentes les promeneurs peuvent-ils se répartir dans les voitures ?

2. De combien de façon différentes peut-on faire cette répartition de telle sorte que 3 garçons et 2 filles soient dans la grande voiture et 2 garçons et 2 filles dans l'autre ?
3. Si en outre on veut que Pierre et Nicolas soient dans la même voiture, de combien de façons différentes pourra-t-on répartir les 9 promeneurs ?

Exercice 6

1. Pour tout entier naturel n , on considère la somme

$$S_n = \sum_{i=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$$

Montrer que la suite (S_n) converge et déterminer sa limite.

2. On considère la suite récurrente définie par

$$\begin{cases} a_0 \\ a_{n+1} = \frac{2}{1 + a_n} \end{cases}$$

Déterminer sa limite.

Indication exprimer la relation $a_{n+1} = \frac{2}{1 + a_n}$ par l'intermédiaire de la fonction $y = f(x) = \frac{2}{1 + x}$.