

UNIVERSITÉ DE YAOUNDE II
INSTITUT DE FORMATION ET DE
RECHERCHE DÉMOGRAPHIQUES
(I.F.O.R.D.)

Avril 1999

CONCOURS DE RECRUTEMENT

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

(Concours A)

Durée : 4 heures

AUCUN DOCUMENT N'EST AUTORISÉ

Barème indicatif :

Exercice 1 : 3,5 pts
Exercice 2 : 3,0 pts
Exercice 3 : 4,0 pts
Exercice 4 : 4,0 pts
Exercice 5 : 4,5 pts
Exercice 6 : 1,0 pt

Exercice 1 : (3,5 pts)

- a) On donne la fonction de variable réelle x : $f(x) = \frac{1+x+x^2}{x-x^2}$

Calculer sur l'intervalle $[2,3]$ l'intégrale $\int_2^3 f(x) dx$

- b) On donne : $f(x) = \frac{7x^2-10x+10}{x^3-2x^2+2x}$

i) Décomposer $f(x)$ en éléments simples.

ii) Calculer : $\int f(x) dx$

iii) En déduire la limite quand a tend vers $+\infty$ de : $\int_1^a f(x) dx$

Exercice 2 : (3 pts)

- 1) Soit un réel U_n (n étant un entier naturel non nul) défini par :

$$U_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

Montrer qu'il existe trois constantes réelles a , b et c telles que $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$:

$$U_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$$

- 2) On considère la somme : $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_{n-2} + U_{n-1} + U_n$

Déduire de 1) la valeur de S_n .

- 3) Calculer la limite de S_n quand n tend vers l'infini.

Exercice 3 : (4 pts)

- 1) On considère la suite V_n définie par son premier terme V_1 et les relations :

- $V_2 = 2V_1$
- $V_n = V_{n-1} + 2V_{n-2}$

- a) Calculer en fonction de V_1 : V_3 , V_4 , V_5 , et V_6 .
 - b) En déduire par récurrence l'expression du terme général V_n de cette suite.
- 2) Calculer $S_n = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_{n-1} + V_n$.
 - 3) Application : $V_1 = 2$ et $n = 20$.
 - 4) S_n admet-elle une limite quand n tend vers l'infini.

Exercice 4 : (4 pts)

- 1) Une population compte 1 million d'habitants à la date t_0 et s'accroît chaque année de 10.000 habitants. Calculer l'effectif de cette population à la date t_1 après un an, t_2 après deux ans et t_3 après trois ans.
En déduire l'effectif de cette population à la date t_n après n années.
- 2) Si cette population s'accroît de 1 % par an, quel sera son effectif après n années ?
- 3) Après combien d'années cette population comptera-t-elle 1,5 millions d'habitants si son taux d'accroissement est maintenu à 1 %.
- 4) En maintenant le taux d'accroissement de cette population à 1 %, en combien d'années l'effectif de cette population sera-t-il égal au double de l'effectif à la date de départ t_0 .

Exercice 5 : (4,5 pts)

On considère la fonction y de variable réelle x définie par :

$$y : x \rightarrow f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{3x - 7}$$

- 1) Etudier les variations de la fonction y .
- 2) Montrer que la fonction y admet une asymptote oblique. Calculez l'équation de cette asymptote oblique et la position de la courbe par rapport à cette asymptote quand x tend vers plus l'infini et quand x tend vers moins l'infini.
- 3) Tracer la courbe représentative de la fonction y en précisant les abscisses et les ordonnées des points de la courbe situés sur les axes.

Exercice 6 : (1 pts)

Déterminer les valeurs des paramètres a et b de la fonction f définie par :

$$f(x) = ae^x + be^{-3x}$$

telles que cette fonction admette un extremum en $x = 0$, cet extremum étant égal à 4.

UNIVERSITÉ DE TAOUNDETT
INSTITUT DE FORMATION ET DE
RECHERCHE DÉMOGRAPHIQUES
(I.F.O.R.D)

Avril 1999

CONCOURS DE RECRUTEMENT

EPREUVE DE PROBABILITÉS ET STATISTIQUE

(Concours A)

Durée : 4 heures

AUCUN DOCUMENT N'EST AUTORISÉ

Barème indicatif :

Exercice 1 : 3.0 points
Exercice 2 : 2.5 points
Exercice 3 : 6.0 points
Exercice 4 : 2.5 points
Exercice 5 : 6.0 points

Exercice 1 : (3 pts)

Dans un service de planification familiale de la ville de Bamako au Mali, on a constaté qu'il y a 25 chances sur 100 qu'une cliente se présente à la réception au cours d'un intervalle de 15 minutes.

- a) Quelle est le nombre moyen de clientes par jour ouvrable (1 jour ouvrable compte 8 heures de travail) ?

Note : la probabilité qu'une cliente se présente à la réception au cours de 15 minutes est 0,25. Le nombre moyen de clients par jour ouvrable est donné par α , avec $\alpha \cdot \Delta t = 0,25$ et $\Delta t = 15$ minutes ou $\frac{1}{4}$ d'heure

- b) En supposant que la loi de probabilité régissant le nombre de clientes arrivant au service de planification familiale pendant un jour ouvrable est la loi de poisson de paramètre $m \leq 8$ et définie par

$$P(X = x) = \frac{m^x e^{-m}}{x!}$$

Quelle est la probabilité qu'il se présente 10 clientes à la réception au cours d'une journée de travail ?

- c) Quelle est la probabilité qu'il se présente entre 10 et 15 clientes par jour.

Exercice 2 : (2,5 pts)

Une enquête réalisée auprès des étudiants d'un institut de formation en démographie indique que :

- 50 % d'entre eux reçoivent la revue "Genus"
- 56 % d'entre eux reçoivent la revue "Population"
- 20 % d'entre eux reçoivent les deux.

Quelle est la probabilité qu'un étudiant :

- a) reçoive la revue "Genus" mais non la revue "Population" ?
- b) reçoive au moins une des deux revues ?
- c) reçoive seulement une des deux revues ?
- d) ne reçoive aucune des deux revues ?
- e) reçoive la revue Genus sachant qu'il ne reçoit pas la revue Population ?

Exercice 3 : (6 pts)

Un couple nouvellement constitué envisage d'avoir trois enfants. Sachant que la probabilité d'avoir une naissance féminine est de 48 %.

- a) Quelles sont les valeurs possibles de la variable aléatoire x correspondant au nombre de filles que le couple peut avoir ?

- b) Quelle est la loi de probabilité associée à la variable x .
- c) Si y est la variable aléatoire définie par le nombre de garçon que le couple peut avoir, quelle est sa loi de probabilité.
- d) Calculer la probabilité que le couple ait 2 filles et 1 garçon ?
- e) Calculer la probabilité que le couple n'ait aucune fille ?
- f) Quel est le nombre moyen de filles que le couple peut avoir ?

Exercice 4 : (2,5 pts)

L'effectif d'une école primaire est de 300 élèves dont 100 filles et 200 garçons. On prélève un échantillon de 30 élèves pour effectuer une enquête sur le rendement scolaire de l'établissement. Soit x le nombre de filles parmi les 30 élèves tirés.

- a) Calculer les probabilités suivantes :
 - i) $P(x \leq 5)$
 - ii) $P(x \geq 25)$
 - iii) $P(x = 10)$.
- b) Calculer la moyenne et la variance de la variable de x .

Exercice 5 : (6 pts)

Une enquête réalisée dans une ville zambienne en 1997 a permis de relever le nombre de partenaires que les hommes et les femmes ont eu avant leur premier mariage. Le tableau 1 reprend les distributions obtenues pour chaque sexe.

- 1) Calculer les distributions relatives pour chaque sexe
- 2) Représenter graphiquement ces deux distributions relatives.
- 3) Calculer pour chaque sexe les nombres moyen et médian de partenaires avant le premier mariage.
- 4) Calculer pour chaque sexe la variance et l'écart-type du nombre de partenaires avant le premier mariage.
- 5) Regrouper les deux distributions par classes quinquennales de nombres de partenaires.
- 6) Représenter les histogrammes des deux distributions.
- 7) Des résultats qui précèdent que peut-on dire des comportements des hommes et des femmes de la ville considérée avant le mariage ?

Tableau 1 : Répartition des hommes et des femmes suivant le nombre de partenaires avant le mariage.

Nombre de partenaires avant le mariage	Hommes	Femmes
0	9	84
1	51	272
2	74	219
3	84	113
4	37	32
5	39	13
6	31	6
7	14	0
8	13	0
9	3	1
10	34	0
11	3	0
12	2	0
13	1	0
14	1	0
15	5	0
16	1	0
17	1	0
18	1	0
19	1	0
20	20	0
21	2	0
22	1	0
23	2	0
24	0	0
25 et +	10	0