INSTITUT DE FORMATION ET DE RECHERCHE DÉMOGRAPHIQUES

ÉPREUVE DE PROBABILITÉS - STATISTIQUES

(Concours type A (Mars 2014))

Exercice 1

Une entreprise industrielle vient des machines-outils. On s'intéresse au nombre de machines vendues en une journée. Pour cela, on définit la variable statistique X associé au caractère ≪ nombre de machines vendues dans la journée ≫.On observe les ventes pour 60 jours et on dresse le tableau des ventes ci-après :

Distribution des ventes journalières d'une entreprise

Nombre de machines vendues dans la journée	Nombre de jours de vente
0	98
1	232
2	119
3	85
4	50
5	16

1. Calculer les fréquences des ventes et les fréquences cumulées croissantes.

2. Donner la définition et calculer les caractéristiques de tendance centrale suivantes : Le mode, la médiane , la moyenne.

3. Calculer les caractéristiques de dispersion suivantes : la variance, l'écart-type, le coefficient de variation.

Exercice 2

Dans une maternité, on a observé un échantillon de 20 naissances selon le poids en kilogramme et la parité :

N°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	1
poids kg	2,9	2,8	3,5	3,9	4,0	4,3	2,2	2,4	3,6	3,0	2,9	2,8	3,5	3,9	4,0	4,3	2,2	2,4	3
Parité	M	P	M	M	M	M	P	M	M	P	M	P	M	M	M	M	P	M	M

Notes : P = primipare ; M = multipare

1. Un chercheur qui s'intéresse au poids seulement classe les naissances en deux catégories : Poids inférieur à 3 kg et poids supérieur ou égal à 3kg.

a) Présenter le tableau d'analyse.

b) Déterminer le pourcentage des enfants de chaque catégorie de poids.

2. Si un chercheur s'intéresse à la parité seulement(primipare ou multipare),

   a) Présenter le tableau d'analyse.

   b) Déterminer le pourcentage des enfants de chaque parité.

3. Si un chercheur s'intéresse au lien entre le poids (classement en deux catégories de la question 1) et la parité,

   a) Présenter le tableau d'analyse

   b) Déterminer le pourcentage :

   – des enfants multipares qui ont un poids inférieur à 3 kg,

   – des enfants primipares qui ont un poids inférieur à 3 kg,

   – des enfants multipares qui ont un poids supérieur ou égal à 3 kg,

   – des enfants primipares qui ont un poids supérieur ou égal à 3 kg.

4. Au seuil de 5%, peut-on dire que le poids dépend de la parité ? Commenter votre réponse.

Exercice 3

Votre jeune frère de 4 ans, qui ne sait pas lire, veut vous aider à aménager votre chambre d'étudiant. Il se propose pour placer vos livres dans la bibliothèque. Vous en avez 10 différents, dont 3 de mathématiques, 4 de statistique et 3 de démographie.

1. Quelle est la probabilité que les 4 livres de statistique soient au début de la tablette ?

2. Quelle est la probabilité que les livres soient tous regroupés par matière ?

   Après avoir placé les 10 livres sur la tablette, votre jeune frère s'ennuie et décide de choisir 3 livres au hasard pour faire semblant d'étudier.

3. Quelle est la probabilité qu'il ait choisi des livres tous de matières différente ?

4. Quelle est la probabilité qu'il ait choisit au moins 2 livres de la même matière ?

Exercice 4

Un jeu télévisé consiste en 10 questions successives auxquelles il peut être répondu par « oui » ou par « non » (on répond obligatoirement). Une réponse est donc faite d'une succession de « oui » et de «non »

1. De combien de façons différentes la suite de 10 réponse peut-elle se présenter ?

2. De combien de façons différentes la réponse «oui» peut-elle figurer exactement 7 fois dans la suite des dix réponses ?

3. De combien de façons différentes la réponse «non»»» peut-elle figurer exactement 3 fois dans la suite de dix réponses ?

Exercice 5

Soit Z une variable statistique définie à partir d'une variable statistique X par : $z_i = \dfrac{x_i - \overline{X}}{\sigma_x}$

1. calculer la moyenne de Z.

2. Calculer la variance de Z.

Exercice 6

X suit une loi normale de paramètres m et $\sigma = 2$. On considère un échantillon de taille n = 30. On obtient $\sum_{i=i}^{30} x_i = 360$. Donner un intervalle de confiance pour m au niveau de confiance 0,95.

INSTITUT DE FORMATION ET DE RECHERCHE DÉMOGRAPHIQUES

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

(Concours type A (Mars 2014))

Exercice 1

On cherche à déterminer l'ensemble E des suites (u_n, n entier naturel), telles que pour tout entier n,

$$3u_{n+2} - 7u_{n+1} + 2u_n = \frac{5}{3^n}$$

a) Montrer qu'il existe dans E une suite (v_n, n entier naturel) telle que :
$v_n = \beta n(\frac{1}{3})^n$

b) Montre que la suite (u_n, n entier naturel)appartient à E si et seulement si,($u_n - v_n$ n entier naturel) appartient à F ensemble des suites (w_n, n entier naturel) telle que, pour tout entier naturel n,

$$3w_{n+2} - 7w_{n+1} + 2w_n = 0$$

c) Déterminer E.

Exercice 2

I. L'effectif d'une population s'accroît suivant la courbe la logistique : $P(t) = \dfrac{a}{1 + e^{-r(t-t_0)}}$ où :

– a est l'effectif maximal que cette population peut atteindre ;

– r est le taux d'accroissement initial de la population ;

– t_0 est l'époque où l'effectif $\frac{a}{2}$ est atteint

a) Déterminer les paramètres a, r et t_0 pour une population dont l'effectif évoluerait comme suit :

- 1950 : 2,876 millions d'habitants ;
- 1960 : 4,572 millions d'habitants ;
- 2010 : 6,131 millions d'habitants.

b) Étudier la variation de la fonction P.

c) Représenter la courbe de cette variation.

II. La probabilité de migrer à une distance r peut être approchée soit par une fonction de type de pareto : $m_1 = \frac{k_1}{r^\alpha}$, ou par une fonction exponentielle $m_2(r) = k_2 e^{-br}$.

Calculer la probabilité de migrer à une distance supérieure à R, pour i=1,2 :

Calculer la probabilité de migrer à une distance supérieure à R, pour i=1,2 :

$$M_i(R) = \int_R^\infty m_i(r)dr.$$

Exercice 3

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Déterminer les valeurs propres et les sous espaces propres de A.

b) Donner une base orthonormée, (u_1, u_2, u_3), formée des vecteurs propres de A.

c) Déterminer la matrice de passage de la base canonique à la base (u_1, u_2, u_3)

Exercice 4

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 4 \\ 3 & -6 & -3 \end{pmatrix}$

a) Montrer que la matrice A est inversible.

b) Calculer son inverse

c) Résoudre le système d'équations : $\begin{cases} 2x + y + 2z = -4 \\ -x + 5y + 4z = 1 \\ 3x - 6y - 3z = -11 \end{cases}$

Exercice 5

Pour tout entier n, on pose : $u_n = \dfrac{n^2}{n!}$

Étudier le sens de variation de la suite (u_n)

Exercice 6

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \int_x^{2x} \dfrac{1}{\ln t} dt$

a) La fonction est-elle définie ?

b) Montrer que la fonction f est derivable sur l'intervalle $]0,0,5[\cup]1;+\infty[$.

c) Calculer $f^{'}$.

d) Montrer que pour x appartenant à l'intervalle $]0;0,5[\cup]1;+\infty[$.

$$\frac{x}{\ln(2x)} \leq f(x) \leq \frac{x}{\ln(x)}.$$

e) En déduire :

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

puis

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)$$