

LA FORME

08

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

REPUBLIQUE DU CAMEROUN

Paix-Travail-Patrie

UNIVERSITE DE DSCHANG

INSTITUT UNIVERSITAIRE DE TECHNOLOGIE
FOTSO VICTOR DE BANDJOUN
BP 134 BANDJOUN

CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE DU CYCLE DE D.U.T.

Septembre 2007

EPREUVE : MATHEMATIQUES

Durée : 4 Heures

EXERCICE 1 : Fonction logarithme

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2 + \ln x}{x}$.

On note C_f sa représentation graphique dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1.1. Etudier les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.

1.2. Calculer la dérivée f' de f puis résoudre l'inéquation $f'(x) \geq 0$.

1.3. En déduire le tableau de variation de la fonction f . (On précisera la valeur exacte des éventuels extremums)

1.4. Tracer la courbe C_f . (On pourra se placer sur l'intervalle $]0; 2]$)

1.5. Préciser, à l'aide d'un calcul, les coordonnées exactes du point d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses.

EXERCICE 2 : Nombres complexes

2.1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $Z^3 + \bar{Z} = 0$. On donnera les solutions sous forme trigonométrique et sous forme algébrique.

2.2. Soit l'équation : $Z^3 - (2 + 2i)Z^2 - (13 + 6i)Z + 20 + 56i = 0$

a. Résoudre cette équation sachant que l'une des racines est réelle, noter z_0 cette racine. Les deux autres racines sont z_1 et z_2 avec $|z_1| < |z_2|$.

b. Placer les points z_0 , z_1 et z_2 dans plan complexe.

EXERCICE 3 : Suites numériques

Soit une suite numérique de terme général U_n tels que :

$$U_0 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

3.1. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \text{Log}(x + \sqrt{1+x^2})$ où Log désigne le logarithme népérien. Déterminer la fonction dérivée f' de f et calculer U_0 .

3.2. Calculer U_1 . A l'aide d'une intégration par parties, calculer U_3 .

3.3.a) Démontrer que : $\forall x \in [0, 1], 0 \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n$

3.3.b) En déduire que la suite de terme général U_n est convergente et calculer sa limite.

EXERCICE 4 : Equations différentielles

4.1. Résoudre l'équation différentielle : $f'' - 5f' + 4f = 0$

4.2. Déterminer la solution particulière f dont la courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) admet pour tangente au point O la droite d'équation $y = -2x + 1$

4.3. On pose $u(x) = 2e^x - e^{4x}$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ (l'ensemble des nombres réels) l'inéquation $u(x) \geq 0$.

4.4. On considère la partie de la courbe d'équation $y = u(x)$ pour $-1 \leq x \leq 0$. En la faisant tourner autour de l'axe des abscisses, on délimite un solide dont le volume est défini par l'intégrale : $V = \pi \int_{-1}^0 [u(x)]^2 dx$. Calculer la valeur exacte de V .

EXERCICE 5: Probabilités

Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher : 4 jetons blancs marqués 0 ; 3 jetons rouges marqués 7 ; 2 jetons blancs marqués 2 ; 1 jeton rouge marqué 5.

5.1. On tire simultanément 4 jetons du sac. Quel est le nombre de tirages possibles ?

5.2. On suppose que tous les tirages sont équiprobables, et on considère les événements suivants :

A : les 4 numéros sont identiques ;

B : avec les jetons tirés, on peut former le nombre 2000 ;

C : tous les jetons sont blancs ;

D : tous les jetons sont de la même couleur.

a) Calculer la probabilité des événements A, B, C et D.

b) On suppose que l'événement C est réalisé, calculer alors la probabilité de l'événement B.

5.3. On établit la règle suivante :

si le joueur peut former le nombre 5000, il gagne 75 francs ;

si le joueur peut former le nombre 7000, il gagne 50 francs ;

si le joueur peut former le nombre 2000, il gagne 20 francs ;

si le joueur peut former le nombre 0000, il perd 25 francs ;

pour tous les autres tirages, il perd 5 francs.

Soit G , la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. Etablir la loi de probabilité de G et calculer son espérance mathématique.

CONCOURS D'ENTRÉE EN PREMIÈRE ANNÉE DU CYCLE DE D.U.T.

Septembre 2007

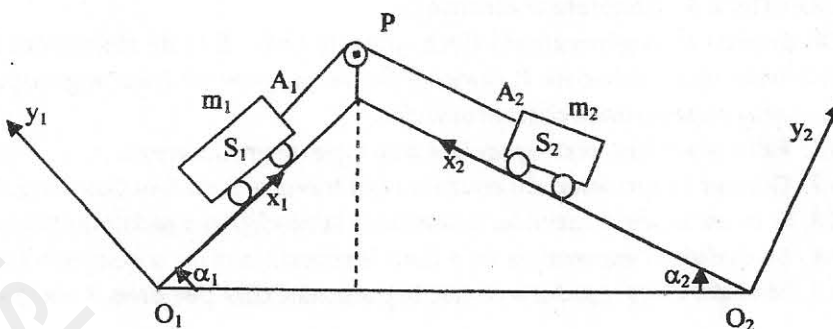
EPREUVE : PHYSIQUES

Durée : 4 Heures

EXERCICE 1 : Plan incliné

On considère le dispositif suivant :

Le système constitué des solides S_1 et S_2 est lâché avec une vitesse initiale nulle lorsque S_1 se trouve en O_1 . Le solide S_2 se déplace vers O_2 et entraîne le solide S_1 par un fil A_1PA_2 passant à travers une poulie.



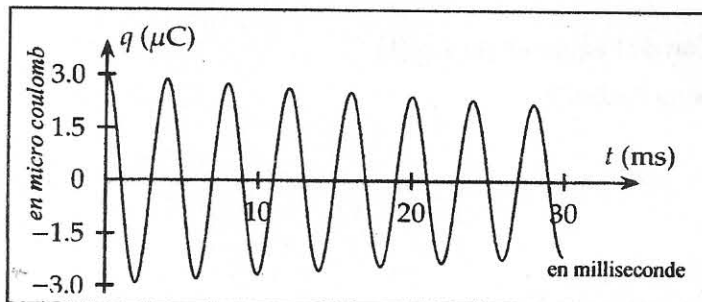
On donne $m_1=10g$, $m_2=50g$, $\alpha_1 = 60^\circ$,
 $\alpha_2 = 30^\circ$ et $g = 10 N/kg$

L : longueur du fil $L = A_1P + A_2P = 1m$. On négligera les dimensions de la poulie et on supposera le fil inextensible.

- 1.1. En isolant le solide S_1 , et en travaillant dans le repère (O, x_1, y_1) , trouver la relation entre la tension du fil (A_1P) T_1 , l'accélération γ_{x_1} du centre de gravité de S_1 , la masse m_1 , l'angle α_1 et g .
- 1.2. Même question à propos du solide S_2 et des grandeurs, T_2 , γ_{x_2} , m_2 , α_2 et g .
- 1.3. Calculer la tension du fil.
- 1.4. Déterminer la durée t_2-t_1 , avec t_1 considéré comme l'instant où S_2 part de P et t_2 l'instant où le solide S_1 arrive en P .
- 1.5. Quelle est la vitesse de S_1 lorsqu'il arrive en P à l'instant t_2 .

EXERCICE 2 : Oscillateur

Un oscillateur électrique libre est formé d'un condensateur initialement chargé, de capacité $C = 1,0 \mu F$, d'un conducteur ohmique de résistance R et d'une bobine d'inductance $L = 0,40 H$ et de résistance négligeable. L'enregistrement de la tension aux bornes du condensateur a permis de tracer la courbe ci-dessous où q désigne la charge de son armature positive.



solution de cette équation.

- 2.1. Déterminer la pseudo-période T des oscillations.
- 2.2. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la charge $q(t)$ à chaque instant dans le cas où R est considérée comme nulle.
- 2.3. Vérifier qu'avec une période $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$, la fonction suivante : $q(t) = Q_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$ est

- 2.4. Calculer la période T_0 et comparer à la pseudo-période T .
- 2.5. Quelle différence présente la solution $q(t)$ trouvée par rapport à la courbe proposée ?
- 2.6. Quelle est la cause de cette différence ?

EXERCICE 3 : Electrostatique

Un faisceau d'électrons est émis dans le vide par un filament F situé sur une plaque A, avec une vitesse initiale négligeable. Il est accéléré par une tension U appliquée entre la plaque A et une autre plaque B parallèle à la première : $U = V_A - V_B$. La distance entre les plaques est $d = 4\text{ cm}$. La plaque B est percée d'un trou noté O. A la sortie du trou O le faisceau d'électrons est soumis à la pesanteur.

Données : $g = 10\text{ ms}^{-2}$; charge d'électron $e = -1,610^{-19}\text{ C}$; $|U| = 200\text{ V}$.

- 3.1. Donner le signe de la tension U pour qu'il y ait accélération entre les plaques A et B.
- 3.2. Déterminer l'accélération entre les plaques A et B.
- 3.3. Calculer la vitesse avec laquelle les électrons atteignent la plaque B.
- 3.4. Après la traversée du trou O, quelle est la nature du mouvement des électrons ?

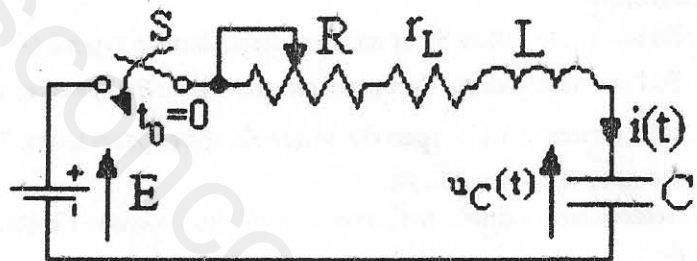
EXERCICE 4 : Générateur électrique

On dispose de n générateurs électriques de f.e.m. E et de résistances internes r chacun que l'on doit brancher sur une résistance extérieure R donnée. On se propose de faire le groupement suivant : p branches en parallèle et m éléments en série dans chaque branche.

- 4.1. Faire le schéma correspondant à ce type de groupement.
- 4.2. Donner l'expression du courant I qui traverse R en fonction de n , E , r , R et m .
- 4.3. Si m est la seule variable, déterminer la condition à satisfaire pour que I soit maximum.
- 4.4. En déduire l'expression de p dans les conditions de la question 4.3.
- 4.5. Montrer alors que dans ce cas, la puissance dissipée dans R est maximale.

EXERCICE 5 : Circuit RLC

Soit le circuit électrique de la figure ci-contre constitué d'un condensateur de capacité C , d'une résistance R et d'une bobine d'inductance L de résistance interne r_L . Le condensateur du circuit est initialement déchargé. L'interrupteur S est fermé à l'instant $t=0$, et un courant $i(t)$ commence à circuler dans le circuit. On donne $E = 100\text{ V}$, $r_L = 150\Omega$ et $L = 0,3\text{ H}$. La résistance R est variable.



- 5.1. Etablir l'équation de la chute de tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur quelques instants seulement après la fermeture de S et déduire l'équation caractéristique $P(\lambda) = 0$.
- 5.2. Résoudre l'équation caractéristique dans les trois cas suivants :
 - a. $R = 450\Omega$ et $C = 3,3\mu\text{F}$
 - b. $R = 0\Omega$ et $C = 3,3\mu\text{F}$
 - c. $R = 0\Omega$ et $C = 0,13\mu\text{F}$
- 5.3. Déduire dans chacun des cas de la question 5.2 la solution de l'équation de $u_C(t)$
- 5.4. Quelle est la limite de $u_C(t)$ et de $i(t)$ lorsque t tend vers l'infini ?