CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA $1^{ère}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

L'épreuve comporte un exercice et un problème indépendants..

Exercice

Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7.

$3^{n+6} - 3^n = 3^n (3^6 - 1) = 728.\ 3^n = 7 \times 104 \times 3^n$

Problème

Le symbole Ln désigne le logarithme népérien.
A toute fin utile, on donne les valeurs numériques suivantes :
$e = 2{,}718$; $e^{1/2} = 1{,}649$; $e^{-1/2} \approx 0{,}607$; $e^{-3/2} \approx 0{,}223$

Contexte

Soient p et q deux nombres réels strictement positifs.
On considère la famille F(p, q), doublement paramétrée par p et q, des fonctions $f_{p,q}$ définies sur $]0, +\infty[$ par :

$$x \to f_{p,q}(x) = (x^p)^{(x^q)}$$

On notera par $C_{p,q}$ le graphe de $f_{p,q}$.
L'objet du problème est d'étudier la famille F(p, q).

Partie A

On prend $p = q = 1$, et, pour alléger les notations, on notera par f_1 la fonction $f_{1,1}$ et par C_1 le graphe $C_{1,1}$: $f_1(x) = x^x$, pour $x > 0$

A1) Etudier précisément les variations de f_1 (limites, asymptotes, points d'inflexion, points caractéristiques, etc ...). Dresser le tableau de variation de f_1.

A1) $Lnf_1(x) = xLnx$
$f'_1(x)/f_1(x) = 1 + Lnx$
$f'_1(x) = (1 + Lnx)\, x^x$
$f''_1(x) = f'_1(x)\,(1 + Lnx) + f_1(x)/x = x^x\,[(1 + Lnx)^2 + 1/x]$

On en déduit que

a) $f'_1(x) = 0$ pour $x = 1/e \approx 0{,}37$; la valeur de f_1 en ce point $1/e = f_1(1/e) = (1/e)^{1/e}$ voisin de 0,692
b) $f''_1 > 0$ pour tout $x > 0$. Il n'y a donc pas de point d'inflexion.

Limites :
Quand $x \to 0$, $xLnx \to 0$ et donc $\lim_{x\to 0} f_1(x) = 1$.
Quand $x \to +\infty$, $\lim f_1(x) = +\infty$.

Asymptote

Quand x → +∞, lim $f_1(x)/x = +\infty$, branche parabolique dans la direction Oy

Pente quand x → 0 :
$\lim\limits_{x\to 0}(f_1(x)-1)/x$ = lim $[e^{xLnx} - 1]/x$ = lim Lnx = - ∞

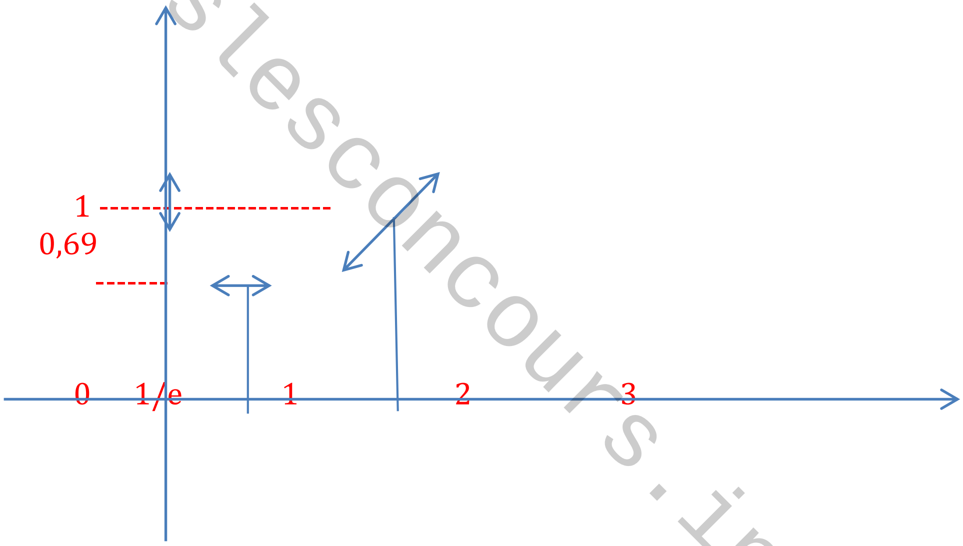
Pente quand x = 1 :
$f'_1(1) = 1$

Tableau de variations

x	0		1/e		1		+ ∞
f'_1		-	0		+		
f_1	1	↘	0,69	↗	1	↗	+ ∞

A2) Tracer le graphe C_1 de f_1.

Quelques points : $f_1(1) = 1$; $f_1(2) = 4$; $f_1(3) = 27$; $f_1(4) = 256$



Partie B
On prend maintenant p = q = 2, et on notera f_2 pour $f_{2,2}$ et par C_2 le graphe $C_{2,2}$.
$f_2(x) = (x^2)^{(x^2)}$, pour x > 0

B1) Donner l'expression de f'_2, dérivée première de f_2. Etudier son signe.

$Lnf_2(x) = 2x^2Lnx$
$f'_2(x)/f_2(x) = 2x(1 + 2Lnx)$
$f'_2(x) = 2x(1 + 2Lnx).\ (x^2)^{(x^2)}$
Puisque x > 0, $f'_2(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1/2} \approx 0{,}606$
Signe de f'_2 : $f'_2 < 0$ pour $x < e^{-1/2}$ et > 0 pour $x > e^{-1/2}$
Valeur de f_2 en $e^{-1/2}$: $f_2(e^{-1/2}) = (1/e)^{1/e} \approx 0{,}692$

$f'_2(1) = 2$

Quand x → 0, $(f_2(x) - x)/x \approx (e^{2x^2Lnx} - x)/x \approx 2xLnx \to 0$

B2) Donner l'expression de f''_2, dérivée seconde de f_2. Etudier son signe et en déduire la concavité de f_2. Donner le tableau de variations de f_2.

NB : on pourra faire apparaître dans $f''_2(x)$ une expression de la forme $a(x) - b(x)$, où a et b sont deux fonctions à expliciter.

$f''_2(x) = 2[f'_2(x).x(1 + 2Lnx) + f_2(x)(3 + 2Lnx)]$
$f''_2(x) = 2f_2(x)[2x^2(1 + 2Lnx)^2 + (3 + 2Lnx)]$
Posons $a(x) = 2x^2(1 + 2Lnx)^2$ et $b(x) = -(3 + 2Lnx)$
$f''_2(x) = a(x) - b(x)$

<u>Etude de a(x) :</u>
$a'(x) = 4x(1 + 2Lnx)^2 + 8x(1 + 2Lnx) = 4x(1 + 2Lnx)(3 + 2Lnx)$

$a'(x) = 0$ pour $x = e^{-1/2} \approx 0{,}606$ et $x = e^{-3/2} \approx 0{,}223$
Quand $x \to 0$: $a(x) \to 0$ et en outre, $(a(x) - a(0))/x = 2x(1 + 2Lnx)^2 \to 0$

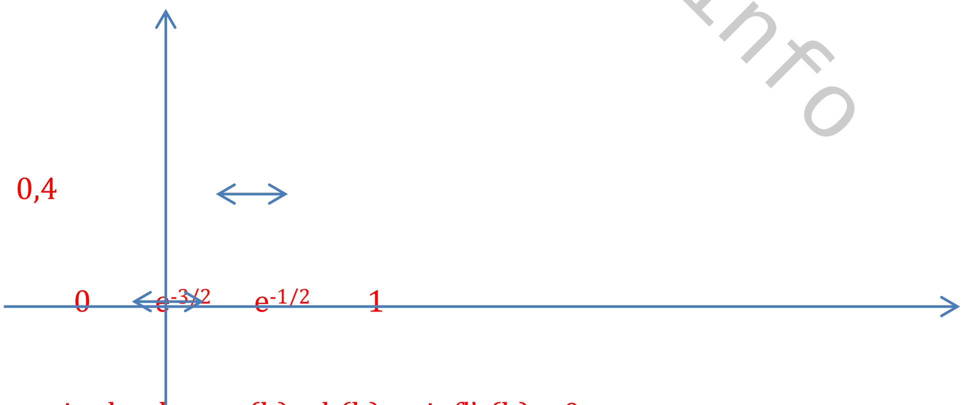
D'où les variations de a(x) :

x	0		$e^{-3/2}$		$e^{-1/2}$		$+\infty$
a'		+	0	-	0	+	
a	0	↗	M_1	↘	m_1	↗	$+\infty$

$M_1 = 2e^{-3}(1 + 2Ln\, e^{-3/2})^2 = 8/e^3 \approx 0{,}4 > 0$
$m_1 = 0 \Rightarrow a(x)$ est strictement > 0

<u>Etude de b(x) :</u>
$b(x) = 0$ en $x = e^{-3/2}$
$b'(x) = -2/x < 0$

x	0		$e^{-3/2}$		$+\infty$
b'		-		-	
b	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$



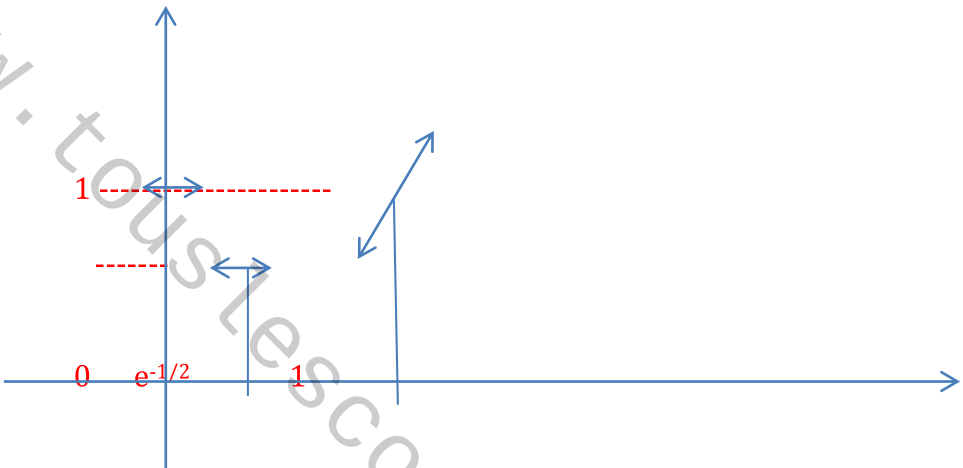
Il existe donc un point h tel que $a(h) = b(h)$, soit $f''_2(h) = 0$,
h étant compris entre 0 et $e^{-3/2}$.
Position de h :
Le calcul montre que $f''_2(0{,}15) < 0$ et $f''_2(0{,}2) > 0$
$0{,}15 < h < 0{,}2$

On en déduit que pour $x < h$, $b > a$ et $f''_2 < 0$; et $f''_2 > 0$ pour $x > h$.

x	0	h		$e^{-1/2}$		$+\infty$
f''_2	$-$	0	$+$		$+$	
f'_2		$-$		0	$+$	
f_2	1	$\searrow$		m_2	$\nearrow$	$+\infty$

$m_2 = f_2(e^{-1/2}) = (1/e)^{1/e} \approx 0{,}692$

B3) Donner la forme du graphe C_2.
Etudier l'intersection de C_1 et C_2 et en déduire les positions respectives de f_1 et f_2.



<u>Intersection de C_1 et C_2</u>

Soit $w = (x^2)^{(x^2)}/x^x$

$\mathrm{Ln}w = 2x^2\mathrm{Ln}x - x\mathrm{Ln}x = x\mathrm{Ln}x(2x - 1)$

$w = 1 \Leftrightarrow \mathrm{Ln}w = 0$ si $x = 1$ ou $x = 1/2$.

x	0		$1/2$		1		$+\infty$
$\mathrm{Ln}w$		$+$	0	$-$	0	$+$	
w		> 1		< 1		> 1	
		$f_2 > f_1$		$f_2 < f_1$		$f_2 > f_1$	

Partie C

On considère dans cette partie le cas général $f_{p,q}(x) = (x^p)^{(x^q)}$, les cas particuliers $p = q = 1$ et $p = q = 2$ ayant fait l'objet des parties A et B.

C1) Donner l'expression de $f'_{p,q}$.
Etudier les éventuelles racines de l'équation $f'_{p,q}(x) = 0$ et en déduire le signe de $f'_{p,q}$.

$\mathrm{Ln}f_{p,q}(x) = px^q\mathrm{Ln}x$

$f'_{p,q}(x)/\ f_{p,q}(x) = px^{q-1}(1 + q\mathrm{Ln}x)$

$f'_{p,q}(x) = p.f_{p,q}(x).x^{q-1}(1 + q\mathrm{Ln}x)$

La dérivée est nulle pour $1 + qLnx = 0$ soit $x = e^{-1/q}$, négative avant, positive après.

C2) Donner l'expression de $f''_{p,q}$. Etudier son signe et en déduire la concavité de $f_{p,q}$.
NB : on pourra faire apparaître dans $f''_{p,q}(x)$ une expression de la forme $u(x) – v(x)$, où u et v sont deux fonctions à expliciter.

$f''_{p,q}(x) = p.f_{p,q}(x).x^{q-2}[px^q(1 +qLnx)^2 + (q-1)(1+qLnx) + q]$

Puisque $p.f_{p,q}(x).x^{q-2} > 0$, $f''_{p,q}(x)$ a le signe de $[px^q(1 +qLnx)^2 + (q-1)(1+qLnx) + q]$.
Posons :
$u(x) = px^q(1 +qLnx)^2$
$v(x) = -(q-1)(1+qLnx) – q$

Etude de u
Lim u = 0 quand x tend vers 0.
Dérivée :
$u'(x) = pqx^{q-1}(1 + qLnx)(3 + qLnx)$
$u'(x) = 0$ en $e^{-3/q}$ et $e^{-1/q}$ (on remarque que $e^{-1/q}$ est toujours < 1)

x	0		$e^{-3/q}$		$e^{-1/q}$		$+\infty$
u'		+	0	-	0	+	
u	0	↗	M_u	↘	m_u	↗	$+\infty$

$m_u = 0$, donc $u \geq 0$ pour tout $x > 0$, donc $M_u > 0$.
$M_u = 4p/e^3$
Quand $x \to 0$, $u'(x)$ tend vers ∞ pour q<1 et tend vers 0 pour q>1.

Etude de v
$v(x) = -(q-1)(1+qLnx) – q$
$v(x) = 0$ pour $x = e^{(2q-1)/q(1-q)}$

$v'(x) = -q(q-1)/x$

Le signe de v' dépend de q.

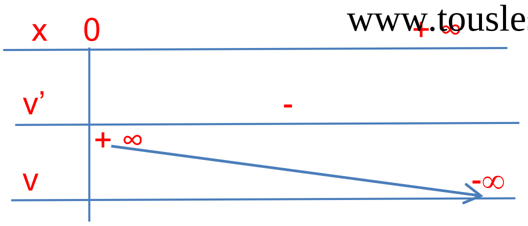
1er cas : q<1
Alors $q(q-1) < 0$ et $v' > 0$, v est strictement croissante

x	0		$+\infty$
v'		+	
v	$-\infty$	↗	$+\infty$

On calcule $v(e^{-1/q}) = - q$ et $v(e^{-3/q}) = q – 2$ (or $q – 2 < 0$).

La courbe représentant la fonction v coupe l'axe des abscisses à droite de $e^{-1/q}$, zéro de u, et ne coupe donc jamais la courbe représentant u.
$f''_{p,q}$ n'est donc jamais nulle, il n'y a pas de point d'inflexion au graphe de $f_{p,q}$; en outre, $f''_{p,q}(x) = u – v > 0$, $C_{p,q}$.est convexe.

2ème cas : q>1
Alors $q(q-1) > 0$ et $v' < 0$, v est strictement décroissante



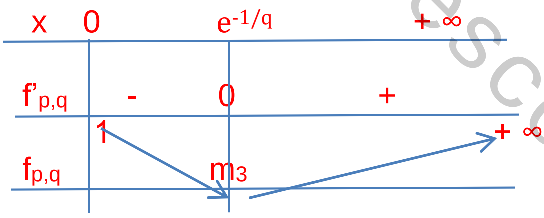
On a toujours $v(e^{-1/q}) = -q$ (< 0) et $v(e^{-3/q}) = q - 2$.
En $e^{-1/q}$, v est négative.
En $e^{-3/q}$, v est négative si $q < 2$ et positive si $q > 2$.
Donc :

a) si $1 < q < 2$, le graphe de v coupe celui de u à gauche de $e^{-3/q}$; il existe donc un point d'inflexion dont l'abscisse z est comprise entre 0 et $e^{-3/q}$.
b) si $q > 2$, le graphe de v coupe celui de u en un point d'abscisse z comprise entre $e^{-3/q}$ et $e^{-1/q}$.

Des variations de u et v, pour $q > 1$, on déduit qu'il existe une et une seule valeur z telle que $u(z) = v(z)$ et donc un et un seul point d'inflexion pour $f_{p,q}$.

La forme des graphes de u et v montre que pour $q>1$, $v > u$ pour $x < z$, puis $v < u$ pour $x > z$.

C3) En déduire les variations de $f_{p,q}$. Etudier ses points particuliers, et donner la forme générale du graphe $C_{p,q}$.



Valeur du minimum : $m_3 = f_{p,q}(e^{-1/q}) = (e^{-p/q})^{1/e} = e^{-p/eq}$
Pente en x = 0 : $(f_{p,q}(x) - 1)/x \approx px^{q-1}Lnx \to 0$ si $q > 1$ et $\to -\infty$ si $q \leq 1$
D'où :
$q > 1$: $f'_{p,q}(x) \to 0$
$q \leq 1$: $f'_{p,q}(x) \to -\infty$

Pente en x = 1 : $f_{p,q}(1) = 1$; $f'_{p,q}(1) = p$

C4) Existe-t-il un point fixe F au faisceau de courbes $\{C_{p,q}\}$. Si oui, donner ses coordonnées, et calculer l'équation de la tangente en F à $C_{p,q}$.

On remarque que pour tous p et q, pour x = 1, $f_{p,q}(1) = 1$; F = (1,1).
La pente en x = 1 est p.
L'équation de la tangente en F est $y = px + (1 - p)$

C5) Etudier l'intersection de C_1 et $C_{p,q}$, p et $q \neq 1$.

$(x^p)^{(x^q)} = x^x$
$xLnx = px^qLnx \Leftrightarrow xLnx(px^{q-1} - 1) = 0$
Solutions : $x = 1$ ou $x = (1/p)^{1/(q-1)}$

C6) Etudier l'intersection de C_2 et $C_{p,q}$, p et $q \neq 2$.

$(x^p)^{(x^q)} = (x^2)^{(x^2)} \Leftrightarrow px^q Lnx = 2x^2 Lnx \Leftrightarrow x^2 Lnx(2 - px^{q-2})$
Solutions : $x = 1$ ou $x = (2/p)^{1/(q-2)}$

C7) Etudier l'intersection de $C_{p,q}$ avec la première bissectrice d'équation $y = x$.

$(x^p)^{(x^q)} = x$
$px^q Lnx = Lnx \Leftrightarrow Lnx(px^q = 1)$

Solutions : $x = 1$ ou $x = (1/p)^{1/q}$

Partie D
Dans cette partie, on suppose que p et q sont entiers positifs ou nuls.
Pour tout x réel strictement positif, on définit la fonction $g_{p,q}$ par :
$x \rightarrow g_{p,q}(x) = x^p(Lnx)^q$

Pour tout réel $x > 0$, on définit l'intégrale $J_{p,q}(x) = \int_0^x g_{p,q}(t)dt$.

D1) Calculer $J_{p,0}(x)$
$J_{p,0}(x) = \int_0^x g_{p,0}(t)dt = \int_0^x t^p dt = x^{p+1}/(p+1)$

D2) Montrer que, pour $q \geq 1$, $J_{p,q}(x)$ peut se mettre sous la forme :
$J_{p,q}(x) = h(x\,;\,p, q) + k(p, q)\, J_{p,q-1}(x)$
où h dépend de x, p et q, et k dépend uniquement de p et q.

$J_{p,q}(x) = x^{p+1}(Lnx)^q/(p+1) - q\int_0^x t^{p+1}(Lnt)^{q-1}/t(p+1)dt$

$J_{p,q}(x) = x^{p+1}(Lnx)^q/(p+1) - (q/(p+1))\, J_{p,q-1}(x)$

$h(x, p, q) = x^{p+1}(Lnx)^q/(p+1)$
$k(p, q) = - q/(p+1)$

D3) Dans cette question, on prend $x = 1$, et on notera $J_{p,q}$ pour $J_{p,q}(1)$.

D3 a) Calculer explicitement J(p, 0) et J(0, q)

D3 b) Calculer $J_{p,q}$ en fonction des entiers p et q

D3 a)
$J_{p,0} = 1/(p+1)$
$J_{0,q} = \int_0^1 (Lnt)^q dt = 0 - \int_0^1 q(Lnt)^{q-1}dt = - q\, J_{0,q-1}$

$J_{0,q} = (-1)^{q-1} q!\, J_{0,1}$

$J_{0,1} = \int_0^1 (Lnt)^1 dt = -1$
$J_{0,q} = (-1)^q.(q!)$

D3 b)
$J_{p,q}(x) = x^{p+1}(Lnx)^q/(p+1) - (q/(p+1))\, J_{p,q-1}(x) \Rightarrow J_{p,q}(1) = - (q/(p+1))\, J_{p,q-1}(1)$
$J_{p,q} = - (q/(p+1))\, J_{p,q-1}$
$J_{p,q-1} = - (q-1)/(p+1))\, J_{p,q-2}$
.
.
.
$J_{p,1} = - 1/(p+1))\, J_{p,0}$

$\Rightarrow J_{p,q} = (-1)^q\,(q!\,/\,(p+1))^q$

D4) On pose $w(x) = x\mathrm{Ln}x$.

D4a) Donner un développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de x^x de la forme $P(x) = a + bw(x) + cw^2(x)$, où a, b et c sont des constantes dont on donnera les valeurs.

$x^x = e^{x\mathrm{Ln}x} = e^w \approx 1 + w + w^2/2$ ($w \to 0$ quand $x \to 0$)

$a = 1$, $b = 1$, $c = 1/2$

D4b) On veut calculer $F(x) = \int_0^x t^t dt$, pour x proche de 0.

On décide d'approximer $F(x) = \int_0^x t^t dt$ par l'intégrale $F^*(x) = \int_0^x P(t)dt$.

Donner l'expression de $F^*(x)$.

$$\int_0^x t^t dt \approx \int_0^x \left(1 + t\mathrm{Ln}t + \frac{(t\mathrm{Ln}t)^2}{2}\right)dt = x + (x^2\mathrm{Ln}x)/2 - x^2/4 + x^3(\mathrm{Ln}x)^2/6 - x^3\mathrm{Ln}x/9 + x^3/27$$

$$\int_0^x t^t dt \approx x - x^2/4 + x^3/27 + (x^2\mathrm{Ln}x)/2 - x^3\mathrm{Ln}x/9 + x^3(\mathrm{Ln}x)^2/6 = F^*(x)$$

D5) En s'inspirant de la démarche de la question D4, avec la fonction $m(x) = px^q(\mathrm{Ln}x)$, proposer un développement limité d'ordre 2 de $f_{p,q}(x) = (x^p)^{(x^q)}$, et en déduire une approximation de l'intégrale $K_{p,q}(x) = \int_0^x (t^p)^{(t^q)}(t)dt$.

$$(x^p)^{(x^q)} = e^{m(x)} \approx 1 + m(x) + m^2(x)/2 = 1 + px^q(\mathrm{Ln}x) + p^2x^{2q}(\mathrm{Ln}x)^2/2$$

$$K_{p,q}(x) \approx x + p.J_{q,1}(x) + p^2/2.J_{2q,2}(x)$$

$$J_{q,1}(x) = \int_0^x t^q\mathrm{Ln}t\,dt = x^{q+1}\mathrm{Ln}x/(q+1) - x^{q+1}/(q+1)^2$$

$$J_{2q,2}(x) = \int_0^x t^{2q}(\mathrm{Ln}t)^2\,dt = x^{q+1}(\mathrm{Ln}x)^2/(2q+1) - 2x^{2q+1}\mathrm{Ln}x/(q+1)^2 + 2x^{2q+1}/(2q+1)^3$$

$$K_{p,q}(x) \approx x + p.\left[x^{q+1}\mathrm{Ln}x/(q+1) - x^{q+1}/(q+1)^2\right] + p^2/2.\left[x^{2q+1}(\mathrm{Ln}x)^2/(2q+1) - 2x^{2q+1}\mathrm{Ln}x/(q+1)^2 + 2x^{2q+1}/(2q+1)^3\right]$$

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

L'épreuve est composée de quatre problèmes indépendants, couvrant les thèmes suivant s : polynômes, matrices, probabilités, nombres complexes. Ils sont à traiter dans un ordre quelconque.

Problème 1 : polynômes

On se place dans l'espace des polynômes définis sur R, et donc à coefficients réels.

1) On considère les polynômes Q_1 et Q_2 définis par :
$Q_1(x) = x^4 + x^2 + 1$
$Q_2(x) = x^8 + x^4 + 1$
Factoriser Q_1 et Q_2.

2) Soit le polynôme P_n défini sur R par :
$P_n(x) = 1 + x + \frac{x(x+1)}{2!} + ... + \frac{x(x+1)...(x+n-1)}{n!}$

2a) Calculer P_1 et factoriser P_2
2b) Donner l'expression générale de P_n comme produit de polynômes irréductibles (on pourra raisonner par récurrence).

Corrigé :
1) $Q_1(x) = x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$
$Q_2(x) = x^8 + x^4 + 1 = Q_1(x^2) = (x^4 - x^2 + 1)(x^4 + x^2 + 1) = (x^4 - x^2 + 1)\, Q_1(x)$
On a factorisé $Q_1(x)$.
On remarque que $(x^4 - x^2 + 1) = (x^2 + 1)^2 - 3x^2 = (x^2 - x\sqrt{3} + 1)(x^2 + x\sqrt{3} + 1)$
$Q_2(x) = (x^2 - x\sqrt{3} + 1)(x^2 + x\sqrt{3} + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$

2) $P_1(x) = 1 + x$ et $P_2(x) = 1 + x + x(x+1)/2! = (x+1)(x+2)/2!$

Supposons que $P_n(x)$ s'écrit sous la forme $\frac{\prod_{k=1}^{n}(x+k)}{n!}$
Par récurrence : l'écriture est vraie pour n = 1
Supposons-la vraie au rang n.
$Pn+1(x) = P_n(x) + \frac{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}{(n+1)!}$

$Pn+1(x) = \frac{\prod_{k=1}^{n}(x+k)}{n!} + \frac{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}{(n+1)!} = \frac{\prod_{k=1}^{n}(x+k)}{(n+1)!}(n + 1 + x) = \frac{\prod_{k=1}^{n+1}(x+k)}{(n+1)!}$

L'expression est donc vraie au rang n+1, donc vérifiée.

Problème 2 : matrices

A - On se place dans l'ensemble M_2 des matrices carrées d'ordre 2, à coefficients réels.

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

A1) Mettre A sous la forme aI + bJ, a et b étant deux entiers à déterminer

a = 1, b = 4 ; A = I + 4J

A2) Calculer A^n, pour tout entier $n \geq 2$.

On remarque que $J^2 = 0$, matrice nulle

Donc en développant $(I + 4J)^n$, tous les termes contenant J^k pour $k \geq 2$ sont nuls, et on obtient : $(I + 4J)^n = I + 4nJ$

B - On se place dans l'ensemble M_3 des matrices carrées d'ordre 3, à coefficients réels.

On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin\alpha \\ -1 & 0 & \cos\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \end{pmatrix}$

Calculer B^n, pour tout entier $n \geq 2$.

Par le calcul direct, on a : $B^2 = \begin{pmatrix} -\cos^2\alpha & -\sin\alpha\cos\alpha & \cos\alpha \\ -\sin\alpha\cos\alpha & -\sin^2\alpha & \sin\alpha \\ -\cos\alpha & -\sin\alpha & 1 \end{pmatrix}$

Le calcul direct de B^3 donne 0, matrice nulle.

On en déduit que $B^n = 0$ pour $n \geq 3$.

C - On considère toujours M_3.

Soit la matrice $C = \begin{pmatrix} a^2 - 1 & ab & ac \\ ab & b^2 - 1 & bc \\ ac & bc & c^2 - 1 \end{pmatrix}$

où les réels a, b et c vérifient la relation $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

I_3 désigne la matrice identité de M_3.

C1) Mettre C sous la forme $C = D - I_3$, D étant une matrice de M_3 à déterminer.

De manière évidente, on a $C = D - I$ avec $D = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$

C2) Calculer D^2 et comparer D et D^2.

Soit u le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

En notant par u^t le transposé de u, on voit immédiatement que $D = u.u^t$

D'où $D^2 = u.\, u^t.\, u.u^t = u.(\, u^t.\, u).u^t = u.\, u^t = D$ puisque $.u^t.\, u = a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

L'application linéaire associée à D est donc une projection orthogonale.

C3) En déduire C^n, pour tout entier $n \geq 2$.

On déduit que $C^2 = (D - I)^2 = D^2 - 2D + I = I - D = -C$
Donc pour tout entier $n \geq 2$, $C^n = (-1)^{n-1}C$.

Problème 3 : probabilités

Une urne contient 5 boules rouges et 5 boules bleues. On procède à n ($n \geq 2$) tirages successifs, avec remise à chaque tirage.
On définit les quatre événements suivants :
A = {il y a des boules des deux couleurs}
B = {il y a au plus une boule bleue}
C = {toutes les boules tirées ont la même couleur}
D = {il y a une seule boule bleue}

1) Calculer la probabilité P(C)
$P(C) = 2.(1/2)^n = 1/2^{n-1}$
2) Calculer la probabilité P(D)
$P(D) = n/2^n$

3) En déduire les probabilités des événements $A \cap B$, A et B.
$A \cap B$ = 1 bleue, n-1 rouges $\Rightarrow P(A \cap B) = P(D) = n/2^n$
$P(A) = 1 - 1/2^{n-1}$
$P(B) = P(0 \text{ bleue}) + P(1 \text{ bleue}) = 1/2^n + n/2^n = (n+1)/2^n$

4) Montrer que les événements A et B sont indépendants si et seulement si on a la relation suivante :

$$2^{n-1} = n + 1$$

A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A).P(B)$
C'est-à-dire $n/2^n = (1 - 1/2^{n-1}).\ (n+1)/2^n$
Ce qui conduit à : $2^{n-1} = n+1$

5) Soit $\{u_n\}$ la suite définie pour $n \geq 2$ par : $u_n = 2^{n-1} - n - 1$
Montrer que la suite $\{u_n\}$ est strictement croissante.

$u_{n+1} = 2^n - n - 2 = 2.2^{n-1} - n - 2 = 2(u_n + n + 1) - n - 2$
$u_{n+1} - u_n = u_n + n$
Pour $n = 2$, $u_2 = -1$
Pour $n = 3$, $u_3 = 0$
Pour $n = 4$, $u_4 = 3$

On en déduit que $u_{n+1} - u_n > 0$ pour $n \geq 2$. La suite est donc croissante strictement.

6) Pour quelle valeur de n les événements A et B sont indépendants ?

Le calcul précédent montre que $n = 3$.

Problème 4 : nombres complexes

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormal usuel.
On appelle A, B et C les points d'affixes respectives – 1, 1 et i.

A – Soit M un point de P d'affixe non nulle z(M). N désigne le point de P d'affixe $\frac{1}{z(M)}$.

A1) Démonter la relation :

$$AN = \frac{AM}{OM}$$

On a $z(N) - z(A) = 1/z(M) + 1 = (1 + z(M))/z(M) = (z(M) - (-1))/z(M)$
En passant aux modules, on a de façon évidente AN = AM/OM

A2) On suppose dans cette question que le point M appartient au cercle de centre B et de rayon $\sqrt{2}$.
$|z|$ désignant le module du complexe z, calculer $|z(M) + 1|^2$
En déduire la valeur de AN.

L'équation du cercle est $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$
Posons $z(M) = x + iy$
$z(M) + 1 = x + 1 + iy$
$|z(M) + 1|^2 = (AM)^2 = (x+1)^2 + y^2 = x^2 + 2x + 1 + y^2 = 2(x^2 + y^2) = 2|z(M)|^2 = 2\ OM^2$
Soit encore $AM/OM = AN = \sqrt{2}$.

B – A tout point M du plan P distinct de C on associe le point M', d'affixe z(M') défini par l'application $h : M \rightarrow M'$ telle que :

$$z(M') = \frac{z^2(M)}{i - z(M)}$$

B1) Déterminer les point fixes de la transformation h.
On remarque que h est définie pour tout point M sauf C.
$z^2 = z(i - z) \Leftrightarrow z(2z - i) = 0$, c'est-à-dire $z = 0$ ou $z = i/2$

B2) En écrivant $z(M) = x + iy$ et $z(M') = x' + iy'$, donner les expressions de x' et y'.
Quel est l'ensemble U des points M de P dont l'image par h est un nombre imaginaire pur ?

$x' = -x(x^2 + y^2 - 2y)/[x^2 + (y-1)^2]$
$y' = (-y(x^2 + y^2 - y) - x^2)/[x^2 + (y-1)^2]$
L'ensemble U est tel que $x' = 0$, soit $x = 0$ (axe des ordonnées sauf le point C) ou $x^2 + y^2 - 2y = 0$ (cercle de centre (0, 1) et de rayon 1.