

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2016

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Martin Luther King, militant non-violent pour les droits civiques des Noirs aux Etats-Unis, a dit : « *Nous devons apprendre à vivre ensemble comme des frères, sinon nous allons mourir tous ensemble comme des idiots* ».
Qu'en pensez-vous ?

Sujet n° 2

Lors de la quatrième conférence de l'ONU sur les femmes, à Pékin, Hillary Clinton, femme politique américaine, a déclaré : « *Les droits de l'homme sont les droits des femmes, et les droits des femmes sont les droits de l'homme* ».

Selon vous, qu'a-t-elle voulu dire ?

Sujet n° 3

Albert Einstein, célèbre physicien, a dit : " *Le monde est dangereux à vivre! Non pas tant à cause de ceux qui font le mal, mais à cause de ceux qui regardent et laissent faire* ".

Quelles réflexions vous inspire cette phrase ?

AVRIL 2016

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

1^{ère} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

L'épreuve comporte un exercice et un problème indépendants.

Exercice

Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7.

Problème

Le symbole $\ln$ désigne le logarithme népérien.

A toute fin utile, on donne les valeurs numériques suivantes :

$e = 2,718$; $e^{1/2} = 1,649$; $e^{-1/2} \approx 0,607$; $e^{-3/2} \approx 0,223$

Contexte

Soient p et q deux nombres réels strictement positifs.

On considère la famille $F(p, q)$, doublement paramétrée par p et q , des fonctions $f_{p,q}$ définies sur $]0, +\infty[$ par : $x \rightarrow f_{p,q}(x) = (x^p)^{(x^q)}$

On notera par $C_{p,q}$ le graphe de $f_{p,q}$.

L'objet du problème est d'étudier la famille $F(p, q)$.

Partie A

On prend $p = q = 1$, et, pour alléger les notations, on notera par f_1 la fonction $f_{1,1}$ et par C_1 le graphe $C_{1,1} : f_1(x) = x^x$, pour $x > 0$

A1) Etudier précisément les variations de f_1 (limites, asymptotes, points d'inflexion, points caractéristiques, etc ...). Dresser le tableau de variation de f_1 .

A2) Tracer le graphe C_1 de f_1 .

Partie B

On prend maintenant $p = q = 2$, et on notera f_2 pour $f_{2,2}$ et par C_2 le graphe $C_{2,2}$.

$f_2(x) = (x^2)^{(x^2)}$, pour $x > 0$

B1) Donner l'expression de f_2' , dérivée première de f_2 . Etudier son signe.

B2) Donner l'expression de f_2'' , dérivée seconde de f_2 . Etudier son signe et en déduire la concavité de f_2 . Donner le tableau de variations de f_2 .

NB : on pourra faire apparaître dans $f_2''(x)$ une expression de la forme $a(x) - b(x)$, où a et b sont deux fonctions à expliciter.

B3) Donner la forme du graphe C_2 .

Etudier l'intersection de C_1 et C_2 et en déduire les positions respectives de f_1 et f_2 .

Partie C

On considère dans cette partie le cas général $f_{p,q}(x) = (x^p)^{(x^q)}$, les cas particuliers $p = q = 1$ et $p = q = 2$ ayant fait l'objet des parties A et B.

C1) Donner l'expression de la dérivée $f'_{p,q}$.

Etudier les éventuelles racines de l'équation $f'_{p,q}(x) = 0$ et en déduire le signe de $f'_{p,q}$.

C2) Donner l'expression de $f''_{p,q}$. Etudier son signe et en déduire la concavité de $f_{p,q}$.

NB : on pourra faire apparaître dans $f'_{p,q}(x)$ une expression de la forme $u(x) - v(x)$, où u et v sont deux fonctions à expliciter.

C3) En déduire les variations de $f_{p,q}$. Etudier ses points particuliers, et donner la forme générale du graphe $C_{p,q}$.

C4) Existe-t-il un point fixe F au faisceau de courbes $\{C_{p,q}\}$. Si oui, donner ses coordonnées, et calculer l'équation de la tangente en F à $C_{p,q}$.

C5) Etudier l'intersection de C_1 et $C_{p,q}$, p et $q \neq 1$.

C6) Etudier l'intersection de C_2 et $C_{p,q}$, p et $q \neq 2$.

C7) Etudier l'intersection de $C_{p,q}$ avec la première bissectrice d'équation $y = x$.

Partie D

Dans cette partie, on suppose que p et q sont entiers positifs ou nuls.

Pour tout x réel strictement positif, on définit la fonction $g_{p,q}$ par : $x \rightarrow g_{p,q}(x) = x^p(\ln x)^q$

Pour tout réel $x > 0$, on définit l'intégrale $J_{p,q}(x) = \int_0^x g_{p,q}(t) dt$.

D1) Calculer $J_{p,0}(x)$

D2) Montrer que, pour $q \geq 1$, $J_{p,q}(x)$ peut se mettre sous la forme :

$$J_{p,q}(x) = h(x; p, q) + k(p, q) J_{p,q-1}(x)$$

où h dépend de x , p et q , et k dépend uniquement de p et q .

D3) Dans cette question, on prend $x = 1$, et on notera $J_{p,q}$ pour $J_{p,q}(1)$.

D3 a) Calculer explicitement $J(p, 0)$ et $J(0, q)$

D3 b) Calculer $J_{p,q}$ en fonction des entiers p et q

D4) On pose $w(x) = x \ln x$.

D4a) Donner un développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de x^x de la forme $P(x) = a + bw(x) + cw^2(x)$, où a , b et c sont des constantes dont on donnera les valeurs.

D4b) On veut calculer $F(x) = \int_0^x t^t dt$, pour x proche de 0.

On décide d'approximer $F(x) = \int_0^x t^t dt$ par l'intégrale $F^*(x) = \int_0^x P(t) dt$.

Donner l'expression de $F^*(x)$.

D5) En s'inspirant de la démarche de la question D4, avec la fonction $m(x) = px^q(\ln x)$, proposer un développement limité d'ordre 2 de $I_{p,q}(x) = (x^p)^{(x^q)}$, et en déduire une approximation de l'intégrale $K_{p,q}(x) = \int_0^x (t^p)^{(t^q)}(t)dt$.

www.touslesconcours.info

AVRIL 2016

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ÉCONOMIE

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des deux sujets suivants

Sujet 1

En novembre 2013, lors de son allocution au Forum du FMI, Lawrence Summers avait défendu l'idée selon laquelle l'économie américaine pouvait être aux prises avec une « stagnation séculaire » en raison d'un déficit pérenne de demande globale. Ce terme a été inventé à la fin des années 1930 par l'économiste Alvin Hansen, qui suggérait que la Grande Dépression pouvait être le début d'une nouvelle ère marquée par une économie durablement déprimée. Il avait alors identifié les facteurs démographiques comme étant une cause majeure de stagnation séculaire ; la baisse du taux de fécondité, arguait-il, entraînait une faible demande d'investissement qui donnait lieu à un excès d'épargne.

Après avoir analysé le rôle et la place du progrès technique et des innovations dans les théories de la croissance et des cycles économiques, vous vous interrogerez sur la pertinence de l'hypothèse selon laquelle le 21^{ème} siècle pourrait être caractérisée par une « stagnation séculaire ».

Sujet 2

De nombreux débats entourent la recherche d'institutions optimales de régulation du marché du travail. L'acuité des controverses est renforcée par le contexte actuel de crise financière et économique. Différentes théories et courants s'opposent ainsi sur l'impact positif ou négatif des institutions qui le régissent sur le fonctionnement du marché du travail.

Après avoir rappelé les principales théories relatives au chômage et au fonctionnement du marché du travail, vous préciserez, à l'aide d'exemples, quels peuvent être leurs apports dans la définition et la mise en œuvre des politiques publiques de l'emploi.

AVRIL 2016

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

2^{ème} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'épreuve est composée de quatre problèmes indépendants, couvrant les thèmes suivants : polynômes, matrices, probabilités, nombres complexes. Ils sont à traiter dans un ordre quelconque.

Problème 1 : polynômes

On se place dans l'espace des polynômes définis sur $\mathbb{R}$, et donc à coefficients réels.
On rappelle que la notation $n!$ (« factorielle n ») désigne le produit des entiers de 1 à n .

1) On considère les polynômes Q_1 et Q_2 définis par :

$$Q_1(x) = x^4 + x^2 + 1$$

$$Q_2(x) = x^8 + x^4 + 1$$

Factoriser Q_1 et Q_2 .

2) Soit le polynôme P_n défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x(x+1)}{2!} + \dots + \frac{x(x+1)\dots(x+n-1)}{n!}$$

2a) Calculer P_1 et factoriser P_2

2b) Donner l'expression générale de P_n comme produit de polynômes irréductibles (on pourra raisonner par récurrence).

Problème 2 : matrices

A - On se place dans l'ensemble M_2 des matrices carrées d'ordre 2, à coefficients réels.

$$\text{On note } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{On considère la matrice } A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

A1) Mettre A sous la forme $aI + bJ$, a et b étant deux entiers à déterminer

A2) Calculer A^n , pour tout entier $n \geq 2$.

B - On se place dans l'ensemble M_3 des matrices carrées d'ordre 3, à coefficients réels.

www.touslesconcours.info

On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin\alpha \\ -1 & 0 & \cos\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \end{pmatrix}$

Calculer B^n , pour tout entier $n \geq 2$.

C - On considère toujours M_3 .

Soit la matrice $C = \begin{pmatrix} a^2 - 1 & ab & ac \\ ab & b^2 - 1 & bc \\ ac & bc & c^2 - 1 \end{pmatrix}$

où les réels a, b et c vérifient la relation $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

I_3 désigne la matrice identité de M_3 .

C1) Mettre C sous la forme $C = D - I_3$, D étant une matrice de M_3 à déterminer.

C2) Calculer D^2 et comparer D et D^2 . Quelle est la nature de l'application linéaire associée à D ?

C3) En déduire C^n , pour tout entier $n \geq 2$.

Problème 3 : probabilités

Une urne contient 5 boules rouges et 5 boules bleues. On procède à n ($n \geq 2$) tirages successifs d'une boule, avec remise à chaque tirage.

On définit les quatre événements suivants :

$A = \{\text{il y a des boules des deux couleurs}\}$

$B = \{\text{il y a au plus une boule bleue}\}$

$C = \{\text{toutes les boules tirées ont la même couleur}\}$

$D = \{\text{il y a une seule boule bleue}\}$

1) Calculer la probabilité $P(C)$

2) Calculer la probabilité $P(D)$

3) En déduire les probabilités des événements $A \cap B$, A et B .

4) Montrer que les événements A et B sont indépendants si et seulement si on a la relation suivante :

$$2^{n-1} = n + 1$$

5) Soit $\{u_n\}$ la suite définie pour $n \geq 2$ par : $u_n = 2^{n-1} - n - 1$

Montrer que la suite $\{u_n\}$ est strictement croissante.

6) Pour quelle valeur de n les événements A et B sont indépendants ?

Problème 4 : nombres complexes

www.touslesconcours.info

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormal usuel.
On appelle A , B et C les points d'affixes respectives -1 , 1 et i .

A – Soit M un point de P d'affixe non nulle $z(M)$. N désigne le point de P d'affixe $\frac{1}{z(M)}$.

A1) Démontrer la relation :

$$AN = \frac{AM}{OM}$$

A2) On suppose dans cette question que le point M appartient au cercle de centre B et de rayon $\sqrt{2}$.

$|z|$ désignant le module du complexe z , calculer $|z(M) + 1|^2$

En déduire la valeur de AN .

B – A tout point M du plan P distinct de C on associe le point M' , d'affixe $z(M')$ défini par l'application $h : M \rightarrow M'$ telle que :

$$z(M') = \frac{z^2(M)}{i - z(M)}$$

B1) Déterminer les point fixes de la transformation h .

B2) En écrivant $z(M) = x + iy$ et $z(M') = x' + iy'$, donner les expressions de x' et y' .

Quel est l'ensemble U des points M de P dont l'image par h est un nombre imaginaire pur ?