

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 1^{ère} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice

On considère l'ensemble C des nombres complexes.

1) Résoudre dans C l'équation :

$$z^2 - (1 + \sqrt{2})z + \sqrt{2} = 0$$

$$\Delta = (1 - \sqrt{2})^2$$

Deux racines réelles :

$$z(1) = 1$$

$$z(2) = \sqrt{2}$$

2) Résoudre dans C l'équation :

$$z^4 - (1 + \sqrt{2})z^3 + (2 + \sqrt{2})z^2 - (1 + \sqrt{2})z + 1 = 0$$

Indication : on pourra faire intervenir la variable $u = z + \frac{1}{z}$

L'équation proposée peut s'écrire sous la forme

$$u^2 - (1 + \sqrt{2})u + \sqrt{2} = 0, \text{ qui admet deux solutions } 1 \text{ et } \sqrt{2}.$$

Les racines en z vérifient donc :

$$z + \frac{1}{z} = 1 \text{ ou } z^2 - z + 1 = 0$$

$$z + \frac{1}{z} = \sqrt{2} \text{ ou } z^2 - z\sqrt{2} + 1 = 0$$

$$z^2 - z + 1 = 0 \text{ conduit à } z(1) \text{ et } z(2) = 1 \pm i\sqrt{3}/2$$

$$z^2 - z\sqrt{2} + 1 = 0 \text{ conduit à } z(3) = (1 + i)/\sqrt{2} \text{ et } z(4) = (1 - i)/\sqrt{2}$$

Problème

Le symbole Ln désigne le logarithme népérien.

On donne les valeurs numériques suivantes :

$$e = 2,718 ; e^2 = 7,39 ; \text{Ln } 2 = 0,69 ; \text{Ln}0,6 = - 0,51 ; \text{Ln}0,7 = - 0,36 ; \text{Ln}0,8 = - 0,22.$$

Définition générale

Soit p et q deux nombres entiers, tels que $p \geq 1$ et $q \geq 1$.

On considère la famille $W(p, q)$, paramétrée par p et q , des fonctions $f_{p,q}$ définies sur $]0, +\infty[$ par :

$$f_{p,q}(x) = \frac{(\ln x)^p}{x^q}$$

Partie A

Dans cette partie, on pose $q = 1$ et on étudie le sous-ensemble de $W(p, 1)$ formé des fonctions $f_{p,1}$: pour simplifier les notations, on écrira f_p pour $f_{p,1}$.

1) Etudier de façon très précise les variations des fonctions f_1 et f_2 (points caractéristiques, tangentes, limites, concavité, asymptotes éventuelles, etc ...).

Tracer les graphes F_1 et F_2 des fonctions f_1 et f_2 dans un repère orthonormé usuel.

Etude de f_1 :

$$f_1(x) = \ln x / x$$

$$x > 0$$

$$f'_1(x) = (1 - \ln x) / x^2 \text{ a le signe de } (1 - \ln x), \text{ nulle pour } x = e, > 0 \text{ pour } x < e \text{ et } < 0 \text{ pour } x > e.$$

Dérivée seconde :

$$f''_1(x) = x(2 \ln x - 3) / x^4$$

$$S'annule en $x_0 = e^{3/2} \sim 4,5$$$

$$\text{En ce point d'abscisse } x_0, f_1(x_0) \sim 0,33.$$

$$\rightarrow \text{Point d'inflexion } (4,5 ; 0,33)$$

Asymptotes :

$\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = -\infty$ (asymptote verticale) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 0$ (asymptote horizontale).

Pas d'asymptote oblique

Points particuliers :

$$f_1(1) = 0$$

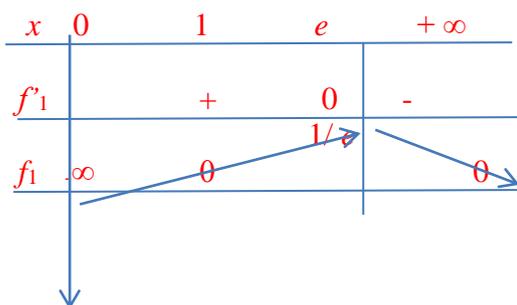
$$\text{Pente en } (1, 0) : f'_1(1) = 1$$

$$f_1(e) = 1/e \sim 0,37.$$

$$\text{Pente au point d'inflexion : } f'_1(e^{3/2}) = -0,025$$

Fonction croissante de 0 à e , passant de $-\infty$ à $1/e$, coupant l'axe des abscisses et point d'abscisse 1 (pente 1), puis décroissante sur $(e, +\infty)$ de $1/e$ à 0.

Changement de concavité en $x_0 = e^{3/2} \sim 4,5$



Etude de f_2 :

$$f_2(x) = (\ln x)^2/x, x > 0$$

$$f_2'(x) = \ln x(2 - \ln x)/x^2$$

S'annule en $x = 1$ et en $x = e^2 \sim 7,4$

f_2' est négative sur $(0, 1)$, positive entre 1 et e^2 , et à nouveau négative pour $x > e^2$;

Donc f_2 est décroissante sur $(0, 1)$, croissante sur $(1, e^2)$, décroissante sur $(e^2, +\infty)$.

Dérivée seconde :

$$f_2''(x) = 2x(1 - 3\ln x + (\ln x)^2)/x^4$$

Solutions de $1 - 3\ln x + (\ln x)^2 = u^2 - 3u + 1 = 0$ en posant $u = \ln x$

$\Delta = 5 \rightarrow$ il existe deux racines $u(1) = (3 - \sqrt{5})/2 \sim 0,38$ et $u(2) = (3 + \sqrt{5})/2 = 2,62$

Donc deux racines en $x : x^1 = e^{u(1)} \sim 1,46$ et $x^2 = e^{u(2)} \sim 13,74$

Asymptotes :

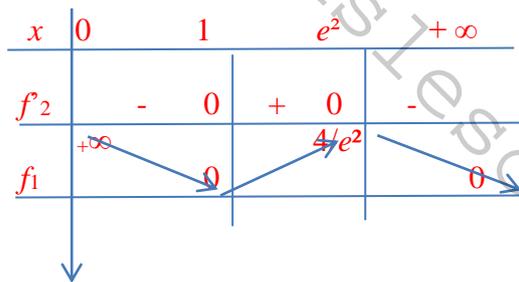
$\lim_{x \rightarrow 0} f_2(x) = +\infty$ quand $x \rightarrow 0$ (asymptote verticale) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = 0$ quand $x \rightarrow +\infty$ (asymptote horizontale).

Pas d'asymptote oblique

Points particuliers :

$f_2(1) = 0$, tangente horizontale

$f_2(e^2) = 0$, tangente horizontale



2) Soit a un nombre réel, $a > 0$. On appelle A le point de F_2 d'abscisse a .

Donner l'équation de la droite $D(a)$ tangente à F_2 au point A .

Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre a la droite $D(a)$ passe-t-elle par l'origine O ?

Tangente à F_2 au point $A(a, f_2(a)) : (y - f_2(a))/(x - a) = f_2'(a)$

$$y = x \ln a(2 - \ln a)/a^2 + 2 \ln a(\ln a - 1)/a$$

$D(a)$ passe par l'origine si et seulement si $2 \ln a(\ln a - 1) = 0$, soit pour $a = 1$ et $a = e$.

Pour $a = 1$, $y = 0$ (tangente horizontale)

Pour $a = e$, $y = x/e^2$

3) Calculer l'intégrale $U(p) = \int_1^{e^p} f_p(x) dx$.

Donner la valeur de $U(3)$.

Que vaut la limite de $U(p)$ quand $p \rightarrow +\infty$?

$$U(3) = \int_1^{e^3} f_3(x) dx = \int_1^{e^3} \frac{(\ln x)^3}{x} dx$$

On pose $u = \ln x : u$ varie de 0 à 3 et $du = dx/x$

$$U(3) = \int_0^3 u^3 du = (3^4/4) = 81/4$$

De même, on trouve aisément que $U(p) = p^{p+1}/(p+1)$

Quand $p \rightarrow +\infty$, $U(p) \rightarrow +\infty$.

Partie B

Dans cette partie, on considère $q = 2$.

On notera par g_p une fonction de $W(p, 2) : g_p = f_{p,2}$

$$g_p(x) = \frac{(\ln x)^p}{x^2}$$

1) Etudier précisément les variations de g_2 ; donner la forme générale de son graphe.

On trouve aisément :

$$g_2'(x) = 2x \ln x (1 - \ln x) / x^4$$

$g_2'(x)$ est négatif sur $(0, 1)$ et $(e, +\infty)$, et positif entre 1 et e .

Donc g_2 est décroissante, croissante puis décroissante sur ces mêmes intervalles.

$$g_2''(x) = 2(1 - 5\ln x + 3(\ln x)^2) / x^4$$

g_2' s'annule en $x = 1$ et $x = e$.

g_2'' s'annule pour $1 - 5\ln x + 3(\ln x)^2 = 0$; soit avec $u = \ln x$, $3u^2 - 5u + 1 = 0$; $\Delta = 13 \rightarrow$ il existe deux racines $u(1) = (5 - \sqrt{13})/6 \sim 0,23$ et $u(2) = (5 + \sqrt{13})/6 = 1,43$, auxquelles sont associées les valeurs $x(1) \sim 1,26$ et $x(2) \sim 4,18$.

Asymptotes :

$\lim_{x \rightarrow 0} g_2(x) = +\infty$ quand $x \rightarrow 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_2(x) = 0$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Pas d'asymptote.

$$g_2(1) = 0$$

$$g_2(e) = 1/e^2$$

Tableau de variations

x	0	1	e	$+\infty$
f_2		- 0	+ 0	-
f_1	$+\infty$	0	$1/e^2$	0

2) On considère l'intégrale $J(2) = \int_1^{e^2} g_2(x) dx$.

Calculer la valeur de $J(2)$.

On pose $u = \ln x$, u varie de 0 à 2 quand x varie de 1 à e^2 .

$$J(2) = \int_1^{e^2} g_2(x) dx = \int_0^2 u^2 e^{-u} du$$

En faisant une intégration par parties :

$$J(2) = [-u^2 e^{-u}]_0^2 + 2 \int_0^2 u e^{-u} du = -4e^{-2} + 2 \int_0^2 u e^{-u} du$$

$$\int_0^2 u e^{-u} du = [-u e^{-u}]_0^2 + \int_0^2 e^{-u} du = -2e^{-2} + (1 - e^{-2})$$

$$D'où le résultat : J(2) = -4e^{-2} + 2[-2e^{-2} + (1 - e^{-2})] = 2 - 10/e^2$$

3) Etudier les variations de g_p et donner la forme générale de son graphe G_p .

$$g'_p(x) = x(\ln x)^{p-1}(p - 2\ln x)/x^4$$

$$S'annule pour $x = 1$ et $x = e^{p/2}$$$

Il faut donc distinguer selon la parité de p :

a) Si p est pair, $p-1$ est impair et $(\ln x)^{p-1}$ est négatif pour $x < 1$

b) Si p est impair, $p-1$ est pair, et $(\ln x)^{p-1} > 0$ pour $x < 1$

$$g''_p(x) = (\ln x)^{p-1}[p(p-1) - 5p\ln x + 6(\ln x)^2]/x^4$$

$$S'annule pour $x = 1$ et si $6u^2 - 5pu + p(p-1) = 0$ avec $u = \ln x$$$

$$\Delta = p(p+24) > 0 \text{ donc il existe deux racines } [5p \pm \sqrt{p(p+24)}]/12.$$

$$g_p(1) = 0$$

$$g_p(e^{p/2}) = \frac{p^p}{(2e)^p}$$

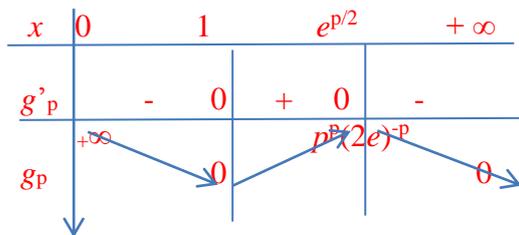
Limites :

Si p est pair, $\lim_{x \rightarrow 0} g_p(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_p(x) = 0$

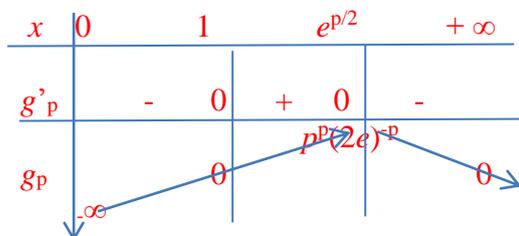
Si p est impair, $\lim_{x \rightarrow 0} g_p(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_p(x) = 0$

Pas d'asymptote.

p pair



p impair



4) Soit l'intégrale $J(p) = \int_1^{e^2} g_p(x) dx$.

Etablir une relation entre $J(p+1)$ et $J(p)$ de la forme $J(p+1) = h(p).J(p) + k(p)$, où $h(p)$ et $k(p)$ sont des fonctions de p que l'on explicitera.

En déduire les valeurs de $J(2)$, $J(3)$ et $J(4)$.

Faisons le changement de variable $u = \text{Lnx}$

$$\text{Pour } p > 1 : J(p) = \int_1^{e^2} g_p(x) dx = \int_0^2 u^p e^{-u} du$$

$$= [-u^p e^{-u}]_{(0,2)} + p \int_0^2 u^{p-1} e^{-u} du$$

$$\text{D'où la relation : } J(p) = pJ(p-1) - 2^p/e^2$$

$$\rightarrow h(p) = p \text{ et } k(p) = -2^p/e^2$$

$$J(1) = \int_1^{e^3} \frac{\text{Lnx}}{x^2} dx = \int_0^2 u e^{-u} du = 1 - 3/e^2$$

$$J(2) = 2J(1) - 4/e^2 = 2 - 10/e^2$$

(on retrouve bien $J(2)$ de la question B2)

$$J(3) = 3J(2) - 8/e^2 = 6 - 38/e^2$$

$$J(4) = 4J(3) - 16/e^2 = 24 - 168/e^2$$

Partie C

Soit Δ la droite d'équation $y = x/e^2$ et P la parabole d'équation $y = x^2$.

1) Etudier l'existence de point(s) d'intersection de D et de F_2 .

Donner leur valeur exacte ou, sinon, un encadrement à 0,1 près.

$$y = (\text{Lnx})^2/x$$

$$y = x/e^2$$

$$\text{Soit } z = (\text{Lnx})^2/x - x/e^2 = (e^2(\text{Lnx})^2 - x^2)/xe^2 = (e\text{Lnx} - x)(e\text{Lnx} + x)/xe^2$$

$$a(x) = e\text{Lnx} + x$$

$$b(x) = e\text{Lnx} - x$$

On montre facilement que b est toujours négative (max = 0, atteint en $x = e$), et que a est croissante de $-\infty$ à $+\infty$.

$$a(x) = 0 \text{ a donc une solution } r \text{ telle que } e\text{Lnr} = r.$$

$$a(1) = 1$$

$$a(1/2) = -1,38$$

$$a(0,6) = -0,79$$

$$a(0,7) = -0,26$$

$$a(0,8) = 0,19$$

$\rightarrow r$ est donc compris entre 0,7 et 0,8.

2) Etudier les points d'intersection de P et de G_2 , graphe de g_2 . En donner un encadrement à 0,1 près.

$$\text{De façon analogue, } z = ((\text{Lnx})^2/x^2 - x^2) = a(x).b(x)/x^4$$

$$\text{avec } a(x) = \text{Lnx} - x^2 \text{ et } b(x) = \text{Lnx} + x^2$$

$$a'(x) = (1 - 2x^2)/x, \text{ positive sur } (0, \sqrt{2}/2), \text{ négative ensuite.}$$

$a(x)\Delta$ est donc croissante sur $(0, \sqrt{2}/2)$, allant de $-\infty$ à un maximum m , décroissante sur $(\sqrt{2}/2, +\infty)$.

Sa valeur maximale $m = (Ln2)^2/2 - 4 \sim -3,76, < 0$

Donc $a(x)\Delta$ a un signe constant, négatif, et ne change pas de signe (pas de racine).

Inversement, $b'(x) = (1 + 2x^2)/x$, positive.

$b(x)\Delta$ est donc croissante sur $(0, +\infty)$ allant de $-\infty$ à $+\infty$. Elle admet donc une racine s , telle que $Lns + s^2 = 0$.

s est donc l'abscisse du point d'intersection unique de P et de G_2 .

$$Ln1 + 1 = 1 > 0$$

$$Ln0,5 + 0,25 = -0,44 < 0$$

$$Ln0,6 + 0,36 = -0,15$$

$$Ln0,7 + 0,49 = 0,13$$

→ s est entre 0,6 et 0,7

Partie D

Dans cette partie, p et q sont des entiers supérieurs ou égaux à 1.

On veut étudier les variations de la fonction générale $f_{p,q}$.

1) Calculer la dérivée première de $f_{p,q}$, et étudier son signe.

$$f'_{p,q}(x) = (Lnx)^{p-1}(p - qLnx)/x^{q+1}$$

S'annule pour $x = 1$ et $x = e^{p/q}$

Son signe dépend de la parité de p : en effet, pour $x < 1$:

→ si p est pair, $p-1$ est impair et $(Lnx)^{p-1} < 0$

→ si p est impair, $p-1$ est pair et $(Lnx)^{p-1} > 0$

Le signe de la dérivée est donc :

Cas 1 : p pair

x	0	1	$e^{p/q}$	$+\infty$
$(Lnx)^{p-1}$	-	0	+	+
$p - qLnx$	+	+	0	-
$f'_{p,q}(x)$	-	0	+	-

Cas 2 : p impair

x	0	1	$e^{p/q}$	$+\infty$
$(Lnx)^{p-1}$	+	0	+	+
$p - qLnx$	+	+	0	-
$f'_{p,q}(x)$	+	0	+	-

2) Calculer la dérivée seconde de $f_{p,q}$ et déterminer les points d'inflexion du graphe de $f_{p,q}$.

Après calculs, on établit :

$$f''_{p,q}(x) = (\text{Lnx})^{p-2}(p(p-1) - p(2q+1)\text{Lnx} + q(q+1)(\text{Lnx})^2)/x^{q+2}$$

Remarque : on retrouve la cohérence avec les résultats des questions A1, B1, B3.

$f''_{p,q}(x)$ s'annule pour $x = 1$ et pour les solutions de l'équation $p(p-1) - p(2q+1)\text{Lnx} + q(q+1)(\text{Lnx})^2 = 0$

Soit l'équation : $q(q+1)u^2 - p(2q+1)u + p(p-1) = 0$

$$\Delta = p^2 + 4pq(q+1) > 0$$

Donc il y a deux solutions s_1 et s_2 et donc deux points d'inflexion e^{s_1} et e^{s_2} .

3) Quelles sont les limites de $f_{p,q}$ quand $x \rightarrow 0$ et $x \rightarrow +\infty$?

Quand $x \rightarrow +\infty$, $f_{p,q}(x) \rightarrow 0$

Quand $x \rightarrow 0$:

a) Si p est pair, $\lim f_{p,q}(x) = +\infty$

b) Si p est impair, $\lim f_{p,q}(x) = -\infty$

4) En déduire les variations de $f_{p,q}$.

On en déduit :

Cas 1 : p pair

x	0	1	$e^{p/q}$	$+\infty$
$f'_{p,q}(x)$	-	0	+ 0	-
$f_{p,q}(x)$	$+\infty$		M	0

Cas 2 : p impair

x	0	1	$e^{p/q}$	$+\infty$
$f'_{p,q}$	+	0	+	-
$f_{p,q}$	$-\infty$	0	M	0

La valeur maximum est $M = f_{p,q}(e^{p/q}) = (p/q)^p / e^p = p^p (qe)^{-p}$

5) Soit $p > 1$ et $q > 1$. On considère l'intégrale $A(p, q) = \int_1^{+\infty} f_{p,q}(x) dx$

Etablir une relation de récurrence de la forme $A(p, q) = u(p, q) + v(p, q) \cdot A(p-1, q)$, où $u(p, q)$ et $v(p, q)$ sont des fonctions de p et q que l'on explicitera.

En posant $u = (\text{Lnx})^p$ et en intégrant par parties, on obtient :

$$A(p, q) = \frac{p}{q-1} A(p-1, q)$$

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 2^{ème} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Problème 1

Une urne contient 11 boules : 6 bleues, 3 rouges et 2 vertes.
On procède à un tirage simultané de 3 boules.

1) Calculer la probabilité que les 3 boules tirées soient toutes de couleurs différentes.

Soit A cet événement.

$$P(A) = (C_6^1 C_3^1 C_2^1) / C_{11}^3 = 12/55$$

2) Calculer la probabilité que les 3 boules soient de la même couleur.

Soit B ce deuxième événement.

$$P(B) = (C_6^3 + C_3^3) / C_{11}^3 = 21/165 = 7/55$$

3) On définit la variable aléatoire X égale au nombre de boules bleues tirées.

Donner la loi de probabilité de X .

Calculer son espérance et son écart-type.

X peut prendre 4 valeurs x : $x = 0, 1, 2$ et 3 .

$$P(X = x) = (C_6^x C_5^{3-x}) / C_{11}^3$$

Ce qui donne :

$$P(X = 0) = 2/33$$

$$P(X = 1) = 12/33 = 4/11$$

$$P(X = 2) = 15/33 = 5/11$$

$$P(X = 3) = 4/33$$

$$\text{Espérance } E(X) = \sum_{i=0}^3 p_i x_i = 54/33 = 18/11 \sim 1,64$$

$$E(X^2) = 108/33 \sim 3,27$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = (108/33) - (54/33)^2 = 648/1089 = 0,595$$

D'où un écart-type égal à 0,77

Problème 2

M_3 désigne l'ensemble des matrices carrées 3×3 à coefficients réels. Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Soit une matrice $M \in M_3$.

On suppose que M vérifie la relation (R) :

$$(R) \quad M^2 = aM + bI$$

où I est la matrice identité de M_3 , et a et b sont deux nombres réels non nuls.

1) Montrer que M est inversible et donner l'expression de son inverse M^{-1} .

On a $M(M - aI) = bI$

La matrice $C = b^{-1}(M - aI)$ vérifie $M.C = I$

Donc $b^{-1}(M - aI)$ est l'inverse de M .

2) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Montrer que A vérifie la relation (R), et donner les valeurs de a et b associées.

On calcule aisément $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

On en déduit que $A^2 = A + 2I$, $a = 1$ et $b = 2$.

Donc $A[(A - I)/2] = I$

3) En déduire l'expression de A^{-1} , inverse de A .

$$A^{-1} = (A - I)/2 = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Partie B

Soit B la matrice suivante de M_3 :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Quelles sont les valeurs propres de B ? En déduire que B est diagonalisable (on notera par D la matrice diagonale).

$$\text{Soit } B - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 3 & -2 - \lambda & 0 \\ -2 & 2 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

Son déterminant (polynôme caractéristique) est $P(\lambda) = (1 - \lambda)(4 + \lambda)(\lambda - 2)$.

Donc B admet trois valeurs propres distinctes qui sont 1, 2, -4.

B , matrice de M_3 , admettant 3 valeurs propres réelles distinctes, est donc bien diagonalisable.

2) Déterminer une base de vecteurs propres et donner la matrice de passage P .

Les trois sous-espaces propres étant de dimension 1, il suffit de trouver un vecteur propre (x, y, z) associé à chacune des valeurs propres.

Pour $\lambda = 1$:

$$2y - z = x$$

$$3x - 2y = y$$

$$-2x + 2y + z = z$$

On en déduit $x = y$ et $x = z$: prenons $e(1) = (1, 1, 1)$

Pour $\lambda = 2$:

$$-2x + 2y - z = 0$$

$$3x - 4y = 0$$

$$-2x + 2y - z = 0$$

On en déduit $3x - 4y = 0$ et $-2x + 2y - z = 0$: prenons $x = 4$, donc $y = 3$ et $z = -2$.

Soit le vp $e(2) = (4, 3, -2)$

Pour $\lambda = -4$:

$$-4x + 2y - z = 0$$

$$3x + 2y = 0$$

$$-2x + 2y + 5z = 0$$

On en déduit $x - z = 0$ et $3x + 2y = 0$: prenons $x = 2$, donc $z = 2$ et $y = -3$.

Soit le vp $e(-4) = (2, -3, 2)$.

$$\text{La matrice de passage } P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

3) n étant un entier naturel non nul, donner l'expression générale de B^n en fonction de D et P et calculer sa valeur explicite.

On sait que $D = P^{-1}BP$

$$\text{Avec } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^n \end{pmatrix}$$

Et $D^n = P^{-1}B^n P$; on en déduit : $B^n = PD^nP^{-1}$

$$P^{-1} = \frac{-1}{30} \begin{pmatrix} 0 & -12 & -18 \\ -5 & 0 & 5 \\ -5 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

En effectuant le calcul, on trouve :

$$B^n = \frac{-1}{30} \begin{pmatrix} -5 \cdot 2^{n+2} - 10(-4)^n & -12 + 12(-4)^n & -18 + 5 \cdot 2^{n+2} - 2(-4)^n \\ -15 \cdot 2^n - 15(-4)^n & -12 - 18(-4)^n & -18 + 5 \cdot 2^{n+1} + 3(-4)^n \\ 5 \cdot 2^{n+1} - 10(-4)^n & -12 + 12(-4)^n & -18 - 5 \cdot 2^{n+1} - 2(-4)^n \end{pmatrix}$$

Problème 3

Partie A

On considère deux suites réelles $\{a(n)\}$ et $\{b(n)\}$, n entier strictement positif, définies par :

(1) $a(1) = 1$ et $a(n+1) = a(n) + 2$

(2) $b(1) = 6$ et $b(n+1) = b(n) - 1$

On définit la suite $\{u(n)\}$ définie pour tout n entier strictement positif par :

$$u(n) = 10a(n) + b(n)$$

1) Quelle est la nature des suites $\{a(n)\}$ et $\{b(n)\}$? Déterminer les expressions des termes généraux $a(n)$ et $b(n)$ en fonction de n , $a(1)$, $b(1)$.

Les suites $a(n)$ et $b(n)$ sont des suites arithmétiques respectivement de premier terme 1 (6) et de raison 2 (-1).

On obtient facilement :

$$a(n) = 1 + 2(n-1)$$

$$b(n) = 6 - (n-1)$$

2) Quelle est la nature de la suite $\{u(n)\}$? Donner l'expression du terme général $u(n)$ en fonction de n et $u(1)$.

$u(n+1) = 10a(n+1) + b(n+1) = 10(a(n) + 2) + b(n) - 1 = 10a(n) + b(n) + 19 = u(n) + 19$
La suite $\{u(n)\}$ est une suite arithmétique de raison 19 et de premier terme $u(1) = 16$
Son terme général est $u(n) = u(1) + 19(n-1) = 16 + 19(n-1) = 19n - 3$

3) A partir de quelle valeur de n la condition $u(n) > 1000$ est-elle vérifiée ?

$$19n - 3 > 1000$$

$$n > (1000 + 3)/19 = 52,8$$

A partir de $n = 53$, $u(n)$ est supérieur strictement à 1000 (et on a : $u(53) = 1004$)

4) On donne la liste de chiffres : 1 ; 6 ; 3 ; 5 ; 5 ; 4 ; 7 ;

Quels sont les trois chiffres suivants ?

$$u(1) = 16, u(2) = 35, u(3) = 54, u(4) = 73, u(5) = 92$$

On remarque que la liste est la succession des chiffres composant les nombres $u(1)$, $u(2)$, $u(3)$, etc. C'est un mode de construction de suite infinie de chiffres.

Les trois chiffres suivants après 7 sont donc 3, 9, 2.

Partie B

On considère deux suites réelles $\{a(n)\}$ et $\{b(n)\}$, n entier par strictement positif, définies par :

$$(1) a(1) \text{ et } a(n+1) = a(n) + \lambda$$

$$(2) b(1) \text{ et } b(n+1) = b(n) + \mu$$

où $a(1)$ et $b(1)$ sont des entiers compris entre 1 et 6, λ et μ sont des nombres entiers relatifs, non nuls, tels que $-2 \leq \lambda, \mu \leq 2$.

1) Donner la nature de la suite $\{u(n)\}$, définie comme dans la Partie A, et l'expression de son terme général $u(n)$ en fonction de n , $u(1)$, λ et μ .

La suite $\{u(n)\}$ peut-elle être une suite constante ?

$$u(n+1) = 10a(n+1) + b(n+1) = 10(a(n) + \lambda) + b(n) + \mu = 10a(n) + b(n) + 10\lambda + \mu$$

$$u(n+1) = u(n) + (10\lambda + \mu)$$

Suite arithmétique de premier terme $u(1) = 10a(1) + b(1)$ et de raison $(10\lambda + \mu)$

Son terme général est donc : $u(n) = u(1) + (n-1)(10\lambda + \mu)$

$$u(n) = 10a(1) + b(1) + (n-1)(10\lambda + \mu)$$

La suite $u(n)$ est constante si $(10\lambda + \mu) = 0$. Ce qui est impossible puisque λ et μ sont des nombres entiers relatifs non nuls.

2) Pour n fixé, déterminer le maximum et le minimum de $u(n)$.

Puisque $1 \leq a(1), b(1) \leq 6$, on en déduit que $10a(1) + b(1)$ vaut au minimum 11 et au maximum 66.

De même, puisque $-2 \leq \lambda, \mu \leq 2$, avec λ, μ non nuls, on en déduit que $10\lambda + \mu$ vaut au minimum -22 et au maximum 22.

$u(n)$ varie donc entre -11 et 88.

3) Etudier l'éventuelle nullité de $u(n)$ selon les valeurs de $a(1)$, $b(1)$, λ et μ . Quelles sont alors les valeurs de n telles que $u(n) = 0$?

Puisque $u(n)$ est compris entre -11 et 88, il peut être nul.

Pour quelles valeurs des paramètres $a(1)$, $b(1)$, λ et μ $u(n)$ sera-t-il nul ?

$$u(n) = 0 \Leftrightarrow 10a(1) + b(1) + (n-1) \cdot (10\lambda + \mu) = 0 \Leftrightarrow n - 1 = - (10a(1) + b(1)) / (10\lambda + \mu)$$

On remarque que $10a(1) + b(1)$ est toujours > 0 ; il faut donc déterminer les paramètres $a(1)$, $b(1)$, λ et μ tels que $(10\lambda + \mu) < 0$, et $10a(1) + b(1)$ soit un multiple de $(10\lambda + \mu)$.

Tableau des valeurs de $(10\lambda + \mu)$

$10\lambda + \mu$	$\lambda = -2$	-1	1	2
$\mu = -2$	-22	-12	8	18
-1	-21	-11	9	19
1	-19	-9	11	21
2	-18	-8	12	22

Tableau des valeurs de $10a(1) + b(1)$

$10a(1)+b(1)$	$a(1) = 1$	2	3	4	5	6
$b(1) = 1$	11	21	31	41	51	61
2	12	22	32	42	52	62
3	13	23	33	43	53	63
4	14	24	34	44	54	64
5	15	25	35	45	55	65
6	16	26	36	46	56	66

Valeurs admissibles pour $(10\lambda + \mu)$ et $10a(1)+b(1)$:

$$10\lambda + \mu = -22 \quad (\lambda = -2, \mu = -2) \text{ et } 10a(1)+b(1) = 22, 44, 66$$

$$\text{Pour } 10a(1)+b(1) = 22, a(1) = 2 \text{ et } b(1) = 2 : n = 2$$

$$\text{Pour } 10a(1)+b(1) = 44, a(1) = 4 \text{ et } b(1) = 4 : n = 3$$

$$\text{Pour } 10a(1)+b(1) = 66, a(1) = 6 \text{ et } b(1) = 6 : n = 4$$

$$10\lambda + \mu = -21 \quad (\lambda = -2, \mu = -1) \text{ et } 10a(1)+b(1) = 21, 42, 63$$

$$\text{Pour } 10a(1)+b(1) = 21, a(1) = 2 \text{ et } b(1) = 1 : n = 2$$

$$\text{Pour } 10a(1)+b(1) = 42, a(1) = 4 \text{ et } b(1) = 2 : n = 3$$

$$\text{Pour } 10a(1)+b(1) = 63, a(1) = 6 \text{ et } b(1) = 3 : n = 4$$

$$10\lambda + \mu = -18 \quad (\lambda = -2, \mu = 2) \text{ et } 10a(1)+b(1) = 36, 54$$

$$\text{Pour } 10a(1)+b(1) = 36, a(1) = 3 \text{ et } b(1) = 6 : n = 3$$

$$\text{Pour } 10a(1)+b(1) = 54, a(1) = 5 \text{ et } b(1) = 4 : n = 4$$

$$10\lambda + \mu = -12 \quad (\lambda = -1, \mu = -2) \text{ et } 10a(1)+b(1) = 12, 24, 36$$

$$\text{Pour } 10a(1)+b(1) = 12, a(1) = 1 \text{ et } b(1) = 2 : n = 2$$

$$\text{Pour } 10a(1)+b(1) = 24, a(1) = 2 \text{ et } b(1) = 4 : n = 3$$

$$\text{Pour } 10a(1)+b(1) = 36, a(1) = 3 \text{ et } b(1) = 6 : n = 4$$

$$10\lambda + \mu = -11 \quad (\lambda = -1, \mu = -1) \text{ et } 10a(1)+b(1) = 22, 33, 44, 55, 66$$

$$\text{Pour } 10a(1)+b(1) = 22, a(1) = 2 \text{ et } b(1) = 2 : n = 3$$

$$\text{Pour } 10a(1)+b(1) = 33, a(1) = 3 \text{ et } b(1) = 3 : n = 4$$

$$\text{Pour } 10a(1)+b(1) = 44, a(1) = 4 \text{ et } b(1) = 4 : n = 5$$

$$\text{Pour } 10a(1)+b(1) = 55, a(1) = 5 \text{ et } b(1) = 5 : n = 6$$

$$\text{Pour } 10a(1)+b(1) = 66, a(1) = 6 \text{ et } b(1) = 6 : n = 7$$

$$10\lambda + \mu = -9 \quad (\lambda = -1, \mu = 1) \text{ et } 10a(1)+b(1) = 36, 45, 54, 63$$

$$\text{Pour } 10a(1)+b(1) = 36, a(1) = 3 \text{ et } b(1) = 6 : n = 5$$

$$\text{Pour } 10a(1)+b(1) = 45, a(1) = 4 \text{ et } b(1) = 5 : n = 6$$

$$\text{Pour } 10a(1)+b(1) = 54, a(1) = 5 \text{ et } b(1) = 4 : n = 7$$

$$\text{Pour } 10a(1)+b(1) = 63, a(1) = 6 \text{ et } b(1) = 3 : n = 8$$

$$10\lambda + \mu = -8 \quad (\lambda = -1, \mu = 2) \text{ et } 10a(1)+b(1) = 16, 24, 32, 56, 64$$

$$\text{Pour } 10a(1)+b(1) = 16, a(1) = 1 \text{ et } b(1) = 6 : n = 3$$

$$\text{Pour } 10a(1)+b(1) = 24, a(1) = 2 \text{ et } b(1) = 4 : n = 4$$

$$\text{Pour } 10a(1)+b(1) = 32, a(1) = 3 \text{ et } b(1) = 2 : n = 5$$

$$\text{Pour } 10a(1)+b(1) = 56, a(1) = 5 \text{ et } b(1) = 6 : n = 8$$

$$\text{Pour } 10a(1)+b(1) = 64, a(1) = 6 \text{ et } b(1) = 4 : n = 9$$