ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2014

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

La Cour Pénale Internationale a pour objectif de « *contribuer à mettre fin à l'impunité des auteurs des crimes les plus graves qui touchent la communauté internationale.* » Est-ce une avancée selon vous et en quoi ?

Sujet n° 2

L'aide internationale, « *soutien précieux ou facteur de domination culturelle pour l'Afrique?* », s'interroge le Monde diplomatique, mensuel français, en mai 2013. Qu'en pensez-vous ?

Sujet n° 3

« *La protection des droits fondamentaux des femmes ne peut plus souffrir de considérations ou prétextes politiques, culturels ou religieux.*» (Soyata Maiga, rapporteure spéciale de la Commission Africaine des Droits de l'Homme et des Peuples)**.** Commentez.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2014

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

1$^{\text{ère}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

L'épreuve comporte un seul problème, composé de quatre parties non indépendantes notées de A à D.

Problème

Le symbole Ln désigne le logarithme népérien de base e, e = 2,718.

Partie A

On considère la fonction numérique h de la variable réelle x, strictement positive, définie par :

$$h(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) - \text{Ln } x$$

Etudier très précisément les variations de h.
On étudiera en particulier le signe et les variations de h' et h'' pour établir le tableau complet des variations de h ; on n'oubliera pas les points caractéristiques, leurs tangentes, les limites et les asymptotes éventuelles de h, etc.

Partie B

1) Soient les deux fonctions a(t) et b(t) de la variable réelle t, $t \in J =]-1, +\infty[$, définies par :

$$a(t) = \frac{1}{t+1} \quad \text{et} \quad b(t) = \text{Ln}(1+t)$$

Donner les développements limités à l'ordre 3 de a(t) et b(t) au voisinage de 0.

2) Montrer que $b(t) \leq t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$, pour $t \in J$.

3) On considère la fonction numérique f de la variable réelle $t \in J =]-1, +\infty[$, définie par :

$$f(t) = \frac{(1+t)^{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{t}\right)}}{e} \quad \text{et} \quad f(0) = 1$$

3a - Quel est le signe de f ?

3b - Montrer que f est continue en 0.

4) Calculer f'(t). Montrer que f est dérivable en 0.

Partie C

1) On considère la fonction numérique g de la variable réelle t, $t \in J =]-1, +\infty[$, définie par :

$$g(t) = \frac{1 + t - \frac{1}{1+t}}{2} - \mathrm{Ln}(1+t)$$

Etablir un lien entre g et h (h introduite à la Partie A).

2) Montrer que la dérivée f '(t) peut être mise sous la forme $\frac{f(t).g(t)}{t^2}$, pour $t \neq 0$.

3) Démontrer que f ' est continue pour tout $t \in J$.

4) A partir des tableaux de variations de g et f, montrer que $f(t) \geq 1$ pour tout $t \in J$.

5) Montrer que $\mathrm{Ln}\, f(t) \leq \frac{t^2}{12} + \frac{t^3}{6}$ pour $t \in J$.

Partie D

Soit une suite $\{u_n\}$, à termes positifs, n entier > 0 ; on définit la suite $\{U_n\}$ par :

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

1) Montrer qu'une condition nécessaire pour que la suite $\{U_n\}$ admette une limite finie U est que $u_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

2) Que peut-on dire du comportement de la suite $\{U_n\}$ si u_n ne tend pas vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$?

3) Pour x réel > 0, n entier > 0, on définit la suite de fonctions $\{u_n(x)\}$ de terme général :

$$u_n(x) = \frac{(nx)^n\sqrt{n}}{n!}$$

Montrer que, pour x > 0, le ratio $u_{n+1}(x)/u_n(x)$ est égal à $e.x.f(\frac{1}{n})$ où f a été définie en B3.

4) Dans cette question, on suppose que $x \geq \frac{1}{e}$

4a – Montrer que la suite de terme général $\{u_n(x)\}$, n entier > 0, est une suite croissante.

4b - En déduire alors la nature de la suite associée $\{U_n(x)\}$ où $U_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$.

5) Dans cette question, on suppose que ex < 1.
Soit q un nombre réel tel que ex < q < 1.

5a - Montrer qu'il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, $u_{n+1}(x)/u_n(x) \leq q$.

5b - En déduire alors que, pour tout $n \geq N$, $u_n(x) \leq q^{n-N}\, u_N(x)$.

5c - Quelle est la nature de la suite $\{U_n(x)\}$?

6) Pour n entier > 0 , on définit les deux suites (v_n) et (w_n) par :

$$v_n = \frac{(\frac{n}{3})^n \sqrt{n}}{n!} \quad \text{et} \quad w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(\frac{k}{2})^k \sqrt{k}}{k!}$$

Quelles sont les limites de ces deux suites ?

7) On étudie la suite $u_n(\frac{1}{e})$.

7a – Donner l'expression de $u_n(\frac{1}{e})$.

7b – Pour tout entier k ≥ 1, calculer le rapport $R(k, e) = u_{k+1}(\frac{1}{e}) / u_k(\frac{1}{e})$.

7c – Montrer, en utilisant la question 5 de la partie C, que Ln R(k, e) est majoré par $M(k) = \frac{1}{12k^2} + \frac{1}{6k^3}$

7d – En déduire que, pour n entier > 1 :

$$\mathrm{Ln}[u_n(\tfrac{1}{e})] \leq -1 + \sum_{k=1}^{n-1} M(k)$$

7e – Montrer que la suite $u_n(\frac{1}{e})$ est majorée.

8) Soit la suite $z_n = \frac{(\frac{n}{e})^n}{n!}$, n entier > 0.

8a – Donner une relation entre z_n et $u_n(\frac{1}{e})$.

8b – Quelle est la limite de la suite z_n quand n tend vers $+\infty$?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2014

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ÉCONOMIE

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des deux sujets suivants.

Sujet n° 1

Au 21e siècle, un des défis majeurs pour les pays africains reste l'amélioration de la gouvernance pour assurer un développement stable et durable bénéficiant à une majorité d'Africains. Ce continent aux 54 pays et aux différents intérêts doit s'efforcer de mettre en avant une vision commune de développement et se donner les moyens d'appliquer les actions concrètes qui aideront à atteindre cet objectif.

Après avoir présenté une analyse de la portée et des limites des unions économiques régionales, vous présenterez les principales stratégies qui pourraient aujourd'hui permettre aux pays africains de promouvoir un développement stable et durable.

Sujet n° 2

Dans son rapport annuel sur la situation des flux d'investissements directs à l'étranger (IDE) pour l'année 2012, la CNUCED (Conférences des Nations Unies sur le commerce et le développement) fait état de trois principales tendances caractérisant la situation économique mondiale : des montants globaux à la baisse, une part croissante à destination des pays en développement, et une plus forte prise en compte de facteurs liés au développement durable. Pour l'Afrique, la CNUCED souligne que les perspectives sont prometteuses : une forte croissance de l'activité, les réformes économiques en cours et les prix élevés des matières premières ayant amélioré la perception du continent par les investisseurs.

Après avoir rappelé les principales théories sur le rôle de l'investissement dans la croissance économique, vous indiquerez dans quelle mesure les évolutions relevées par la CNUCED sont de nature à permettre aux pays africains de diversifier leur production, d'acquérir de la technologie et de développer les marchés régionaux.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2014

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'épreuve est composée de quatre problèmes indépendants, qui peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Problème 1

Soit a un paramètre réel qui vérifie $0 < a < 1$.
N désigne un entier fixé, $N > 1$.

1) On considère la suite (u_n) de nombres réels vérifiant les relations suivantes :

$u_0 = 0$
$u_N = 1$
$u_n = a.u_{n+1} + (1 - a)u_{n-1}$, pour tout n entier > 0

Exprimer u_n en fonction de n, N et a (on discutera selon les valeurs du paramètre a).

2) On considère la suite (v_n) de nombres réels vérifiant les relations suivantes :

$v_0 = 1$
$v_N = 0$
$v_n = a.v_{n+1} + (1 - a)v_{n-1}$, pour tout n entier > 0

Exprimer v_n en fonction de n, N et a.

Problème 2

Le Calife appelle son Grand Vizir, et lui tient ce discours :
« Cher ami, tout le monde sait que tu rêves de prendre ma succession quand je me retirerai, et même peut-être avant.
Alors, pour que tout soit clair entre nous, je te propose le jeu suivant.
J'ai dans les mains deux sacs de formes et de couleurs identiques. Celui que je tiens dans ma main droite contient deux boules rouges, celui que j'ai dans ma main gauche en contient trois. Tu peux vérifier.
Voici six boules bleues : je te laisse les mettre dans ces sacs comme tu le souhaites. Quand tu auras procédé à la totale répartition de ces six boules bleues entre les deux sacs, tu fermeras les yeux, je tirerai au sort, entièrement au hasard, un sac, et tu choisiras une boule au hasard dans le sac que je te proposerai.
Si la boule est bleue, tu prendras ma succession instantanément.
Mais si elle est rouge, tu seras banni à jamais et condamné à l'exil ».

Comment le Grand Vizir doit-il répartir ses six boules bleues entre les deux sacs de façon à maximiser ses chances de devenir Calife ? Le résultat doit être justifié.

Problème 3

C désigne le corps des nombres complexes.

Partie A

Soit f l'application de C dans C qui, à tout complexe z, $z \neq -3$, associe f(z) défini par :

$$f(z) = \frac{z+1-i}{z+3}$$

M désigne le point courant d'affixe z.

1) Déterminer l'ensemble, noté U, des points M tels que le module $|f(z)|$ de f(z) soit égal à 1.

2) Déterminer l'ensemble V des points M tels que f(z) soit un nombre réel strictement négatif.

3) Déterminer l'ensemble W des points M tels que $|f(z)|$ soit un nombre imaginaire pur.

Partie B

Soit g l'application de C dans C qui, à tout complexe z, $z \neq 2i$, associe g(z) défini par :

$$g(z) = \frac{z-1}{z-2i}$$

M désigne le point courant d'affixe z.

1) Ecrire g(i) sous forme cartésienne et sous forme trigonométrique.

2) Résoudre l'équation $g(z) = 2i$

3) Déterminer l'ensemble A des points M tels que $|g(z)| = 2$.

4) Déterminer l'ensemble B des points M tels que l'argument arg(g(z)) soit égal à $\pi/2$, modulo 2π.

5) Etudier l'intersection de A et B.

6) Résoudre l'équation $f(z) = g(z)$.

Problème 4

Le symbole Ln désigne le logarithme népérien, de base e = 2,718.

On considère la famille de fonctions $f_{a,b}$, où a et b sont deux paramètres réels, définie sur $R^{+*} - \{1\}$, par :

$$f_{a,b}(x) = ax + \frac{b}{Lnx}$$

1 – Déterminer les réels a et b pour que la courbe C représentant graphiquement $f_{a,b}$ dans le repère orthonormé usuel coupe l'axe des abscisses au point E (e, 0), et pour que la tangente à C au point E soit parallèle à la droite $y = 2x$.

Dans la suite du problème, on notera par f la fonction correspondant aux valeurs ainsi trouvées de a et b.

2 – Etudier très précisément les variations de f (dérivées, concavité, limites, asymptotes éventuelles, intersection avec les axes, etc …).

3 – Soit la fonction g définie sur l'intervalle $R^{+*} - \{1\}$ par : $g(x) = x - \dfrac{e}{x.Lnx}$

3a) Etudier les positions respectives des courbes F et G représentant les fonctions f et g.

3b) Calculer une primitive de g(x).