AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 1^{ère} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Préambule :

Dans tout le problème, on admettra les résultats suivants :

a) $\forall a \in \mathbb{R}, \forall x > 0$, l'intégrale $f_a(x) = \int_x^{+\infty} t^a e^{-t^2/2} dt$ existe et est convergente

b) $\forall a > -1$, l'intégrale $g(a) = f_a(0)$ existe

c) $g(0) = f_0(0) = (\pi/2)^{1/2}$

Partie A : a = 0, étude de la fonction f_0

On considère la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f_0(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt$$

1) En découpant l'intégrale sur $[x, +\infty[$ en une intégrale sur $[x, 1[$ et une intégrale sur $[1, +\infty[$, montrer que f_0 est, en fait, définie sur $\mathbb{R}$.

$$f_0(x) = \int_x^1 e^{-t^2/2} dt + \int_1^{+\infty} e^{-t^2/2} dt$$

La deuxième intégrale de l'expression précédente existe d'après le préambule ($x = 1$) et est une constante ; quant à la première intégrale, elle existe pour x réel quelconque car la fonction $e^{-t^2/2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Interpréter précisément la fonction $f_0 / (2\pi)^{1/2}$ en termes de probabilités.

$f_0(x) / (2\pi)^{1/2}$ n'est autre que le complément à 1 de la fonction de répartition $\Phi(x)$ de la loi normale centrée réduite $N(0, 1)$.

$$f_0(x) / (2\pi)^{1/2} = 1 - \Phi(x).$$

3) Donner les valeurs des limites de f_0 quand x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.

On en déduit, puisque $\Phi(x)$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$ et vers 0 quand x tend vers $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = (2\pi)^{1/2}$$

Partie B : $a > -1$, étude de l'intégrale $g(a)$

En fonction des notations vues dans le préambule, l'intégrale $g(a)$ est définie par :

$$g(a) = f_a(0) = \int_0^{+\infty} t^a e^{-t^2/2} dt$$

1) Calculer $g(1)$ et $g(2)$.

$$g(1) = f_1(0) = \int_{\mathbb{R}^+} t \cdot e^{-t^2/2} dt = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-u} du \text{ en faisant le changement de variable } u = t^2/2.$$

D'où $g(1) = 1$.

$$g(2) = f_2(0) = \int_{\mathbb{R}^+} t^2 \cdot e^{-t^2/2} dt = \int_{\mathbb{R}^+} t \cdot t e^{-t^2/2} dt$$

En intégrant par parties avec $u = t$ et $v' = te^{-t^2/2}$, donc $v = -e^{-t^2/2}$, on obtient:

$$g(2) = [-te^{-t^2/2}]_{\mathbb{R}^+} + \int_{\mathbb{R}^+} e^{-t^2/2} dt = 0 + f_0(0) = (\pi/2)^{1/2}$$

2) A l'aide d'une intégration par parties, établir la relation:

$$g(a+2) = (a+1)g(a)$$

$$g(a+2) = \int_{\mathbb{R}^+} t^{a+2} e^{-t^2/2} dt = \int_{\mathbb{R}^+} t^{a+1} \cdot t \cdot e^{-t^2/2} dt$$

Par parties avec $u = t^{a+1}$ et $v' = te^{-t^2/2}$, donc $v = -e^{-t^2/2}$, on obtient:

$$g(a+2) = [-t^{a+1} e^{-t^2/2}]_{\mathbb{R}^+} + \int_{\mathbb{R}^+} (a+1) t^a e^{-t^2/2} dt = 0 + (a+1) g(a)$$

3) Pour tout nombre entier n , écrire $g(a+2n)$ en fonction de $g(a+2(n-1))$.
En déduire l'expression de $g(a+2n)$ en fonction de $g(a)$.

Il est évident que $a+2n = a+2n-2+2 = a+2(n-1)+2$

Donc, en appliquant la relation de la question 2, on a :

$$g(a+2(n-1)+2) = (a+2(n-1)+1)g(a+2(n-1)) = (a+2n-1)g(a+2(n-1))$$

On en déduit, pour tout entier $n > 0$:

$$g(a+2n) = \prod_{k=1}^n (a+2k-1) g(a)$$

4) Soit m un nombre entier. On veut donner l'expression de $g(m)$ en fonction de m .

4a) Démontrer que $1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n - 1) = (2n)! / 2^n \cdot n!$

Partons de $1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n - 1)$; multiplions et divisons pour ne rien changer cette quantité par le produit des n premiers nombres pairs $2 \times 4 \times 6 \times \dots \times n$, qui est aussi égal à $2^n \cdot n!$.

On obtient au numérateur la quantité $(2n)!$, d'où le résultat recherché.

4b) Donner les expressions de $g(m)$ en fonction de m pour m pair, $m = 2p$, puis pour m impair, $m = 2p + 1$.

Soit $m = 2p$.

On fait $a = 0$ dans l'expression trouvée à la question 3, et on a :

$$g(2p) = \prod_{k=1}^p (2k - 1) g(0) = \prod_{k=1}^p (2k - 1) (\pi/2)^{1/2}$$

D'où le résultat :

$$g(2p) = (\pi)^{1/2} (2p)! / 2^{p+1/2} \cdot p!$$

Soit $m = 2p + 1$.

On fait $a = 1$ dans la relation de la question 3, ce qui conduit à :

$$g(1 + 2p) = \prod_{k=1}^p (2k) g(1) \text{ avec } g(1) = 1.$$

Il s'en suit : $g(1 + 2p) = (2p)! = 2^p \cdot p!$

Partie C : $a > -1$, étude de la fonction f_a

On considère la fonction f_a , $a > -1$, définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f_a(x) = \int_x^{+\infty} t^a e^{-t^2/2} dt$$

1) Montrer que la fonction f_a est dérivable sur $]0, +\infty[$.

En déduire $(f_a)'$ et $(f_a)''$, respectivement dérivée d'ordre 1 et 2 de f_a .

$$\begin{aligned} f_a(x) &= \int_{[x, +\infty[} t^a e^{-t^2/2} dt = \int_{[x, 1[} t^a e^{-t^2/2} dt + \int_{]1, +\infty[} t^a e^{-t^2/2} dt \\ &= \int_{]1, +\infty[} t^a e^{-t^2/2} dt - \int_{]1, x[} t^a e^{-t^2/2} dt \end{aligned}$$

La première intégrale est une constante, la deuxième est dérivable pour $x > 0$, de dérivée $x^a e^{-x^2/2}$.

f_a est donc dérivable pour $x > 0$, de dérivée $f_a'(x) = -x^a e^{-x^2/2}$.

On trouve ensuite : $f_a''(x) = x^{a-1} e^{-x^2/2} (x^2 - a)$

2) Quel est le sens de variation de f_a sur $]0, +\infty[$?

La dérivée $f_a'(x) = -x^a e^{-x^2/2}$ est strictement négative pour $x > 0$.

On en déduit que f_a est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

3) Etudier la limite de f_a quand x tend vers $+\infty$.

(on pourra couper l'intégrale sur $[x, +\infty[$ en une intégrale sur $[x, 1[$ et une intégrale sur $[1, +\infty[$)

D'après l'écriture $f_a(x) = \int_{[1, +\infty[} t^a e^{-t^2/2} dt - \int_{[1, x[} t^a e^{-t^2/2} dt$, et en vertu du préambule, on a $\lim_{x \rightarrow \infty} f_a(x) = 0$.

4) Dans toute cette question, on se restreint à $a > 0$.

4a) Montrer que f_a est continue sur $[0, +\infty[$.

$\lim_{x \rightarrow 0} f_a(x) = \int_{\mathbb{R}_+} t^a e^{-t^2/2} dt$ (cf préambule) = $f_a(0)$, donc la fonction f_a est continue en 0.

4b) En déduire que $\lim_{x \rightarrow 0} f'_a(x) = f'_a(0) = 0$.

D'après le théorème des accroissements finis, $\lim_{x \rightarrow 0} f'_a(x) = f'_a(0) = 0$.

4c) Dresser le tableau de variations de f_a et donner la forme de sa courbe.

Puisque a est positif, f'_a s'annule en $a^{1/2}$, est négative avant, positive après.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'_a(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'_a(x) = 0$$

On en déduit que f'_a décroît de 0 à $\min = f'_a(a^{1/2})$ quand x varie de 0 à $a^{1/2}$, puis croît de ce minimum à 0 quand x varie de $a^{1/2}$ à $+\infty$.

f'_a étant toujours négative, f_a décroît de $f_a(0)$ à 0, avec point d'inflexion en $a^{1/2}$ (concave avant, convexe après).

5) Dans toute cette question, on se restreint à $-1 < a < 0$.

5a) Montrer que f_a est continue sur $[0, +\infty[$.

Idem précédemment, en vertu du préambule.

5b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f'_a(x)$. La fonction f_a est-elle dérivable en 0 ?

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'_a(x) = -\infty, \text{ donc } f_a \text{ n'est pas dérivable en } 0$$

5c) Dresser le tableau de variations de f_a et donner la forme de sa courbe.

Puisque a est entre -1 et 0 , f''_a est toujours positive pour $x > 0$, donc f_a est convexe, strictement décroissante de $f_a(0)$ à 0.

6) Pour toute la suite du problème, on revient au cas général $a > -1$.

A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que :

$$f_a(x) = x^{a-1} e^{-x^2/2} + (a-1)f_{a-2}(x)$$

Pas de difficulté dans cette intégration, avec $u = t^{a-1}$ et $v' = te^{-t^2/2}$, donc $v = -e^{-t^2/2}$.

7) A partir de la relation établie à la question 6, étudier le signe de $f_a(x) - x^{a-1} e^{-x^2/2}$.

$$\text{On a donc : } f_a(x) - x^{a-1} e^{-x^2/2} = (a-1)f_{a-2}(x)$$

Le signe de cette différence est celui de $a-1$, soit :

$$f_a(x) - x^{a-1} e^{-x^2/2} \geq 0 \text{ si } a > 1$$

$$f_a(x) - x^{a-1} e^{-x^2/2} \leq 0 \text{ si } a < 1$$

$$f_a(x) - x^{a-1} e^{-x^2/2} = 0 \text{ si } a = 1 \text{ et dans ce cas } f_a(x) = f_1(x) = e^{-x^2/2}$$

8) Démontrer que, pour tout $a > -1$, on a la majoration suivante :

$$|f_a(x) - x^{a-1} e^{-x^2/2}| \leq |a-1| \cdot f_a(x) / x^2$$

$$|f_a(x) - x^{a-1} e^{-x^2/2}| = |a-1| \int_{[x, +\infty[} t^{a-2} e^{-t^2/2} dt$$

$$\text{Or } t^{a-2} = t^a / t^2.$$

Comme $t \in [x, +\infty[$, et $x > 0$, $t \geq x$ et donc $1/t \leq 1/x$, d'où $t^{a-2} \leq t^a / x^2$.

$$\int_{[x, +\infty[} t^{a-2} e^{-t^2/2} dt \leq \left[\int_{[x, +\infty[} t^a e^{-t^2/2} dt \right] / x^2 = f_a(x) / x^2$$

En déduire que, quand x tend vers $+\infty$, on a l'équivalent :

$$f_a(x) \sim x^{a-1} e^{-x^2/2}$$

Quand $x \rightarrow +\infty$, $|a-1| \cdot f_a(x) / x^2$ tend vers 0, d'où le résultat.

9) Dans le cas où $-1 < a \leq 1$, montrer que la majoration trouvée à la question 8 peut être améliorée en :

$$|f_a(x) - x^{a-1} e^{-x^2/2}| \leq 2 x^{a-3} e^{-x^2/2}$$

Reprenons le majorant trouvé à la question 8 : $|a-1| \cdot f_a(x) / x^2$

Pour $-1 < a \leq 1$, $|a-1| \leq 2$.

D'autre part, on a montré à la question 6 que $f_a(x) - x^{a-1} e^{-x^2/2} \leq 0$ si $a < 1$.

Il s'en suit :

$$|a-1| \cdot f_a(x) / x^2 \leq 2 \cdot x^{a-1} e^{-x^2/2} / x^2 = 2 x^{a-3} e^{-x^2/2}$$

Partie D : polynômes de Hermite

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^{-x^2/2}$.

1) Etudier précisément les variations et donner la forme du graphe de h .

h est définie sur $\mathbb{R}$, positive, paire, telle que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h = 0$ quand x tend vers l'infini (asymptote horizontale : $y = 0$), $h(0) = 1$.

$h'(x) = -x h(x) \Rightarrow h$ est décroissante de 1 à 0 sur $\mathbb{R}^+$

$$h'(0) = 0$$

$h''(x) = (x^2 - 1)h(x)$ s'annule en $x = 1$ et -1 (points d'inflexion). La fonction est concave sur -1 et $+1$ et convexe sinon.

2) Donner l'expression de la dérivée $h'(x)$ en fonction de $h(x)$.

$$h'(x) = -x h(x)$$

3) Montrer que $h''(x) = P_2(x).h(x)$ et $h'''(x) = P_3(x).h(x)$, où P_2 et P_3 sont des polynômes respectivement de degré 2 et 3.

$$h''(x) = -h(x) - xh'(x) = (x^2 - 1)h(x)$$

$$h'''(x) = (x^2 - 1)h'(x) + 2x.h(x) = (-x^3 + 3x).h(x)$$

$$P_2(x) = x^2 - 1$$

$$P_3(x) = -x^3 + 3x$$

4) Montrer rigoureusement que la dérivée d'ordre n de h , $h^{(n)}(x)$ peut être écrite sous la forme $P_n(x).h(x)$, où P_n est un polynôme de degré n ne comportant que des puissances paires de x si n est pair, ou uniquement des puissances impaires de x si n est impair. Le polynôme $H_n(x) = (-1)^n P_n(x)$ est appelé polynôme de Hermite. Ecrire H_1, H_2, H_3 .

Raisonnons par récurrence :

$$P_1(x) = -x$$

Soit n pair, $n = 2p$:

$$P_{2p}(x) = \sum_{k=0}^p a_{2k} x^{2k}$$

$$h^{(2p)}(x) = P_{2p}(x).h(x)$$

$$h^{(2p+1)}(x) = P_{2p}(x).h'(x) + P'_{2p}(x).h(x) = -x.P_{2p}(x).h(x) + P'_{2p}(x).h(x)$$

$$h^{(2p+1)}(x) = P_{2p+1}(x).h(x) = [-x.P_{2p}(x) + P'_{2p}(x)].h(x)$$

$$P_{2p+1}(x) = [-x.P_{2p}(x) + P'_{2p}(x)] = -a_{2p}x^{2p+1} + \sum_{k=1}^p (-a_{2k-2} + 2k.a_{2k})x^{2k-1}$$

$$H_1 = x$$

$$H_2 = x^2 - 1$$

$$H_3 = x^3 - 3x$$

5) Etablir une relation entre P_{n+1}, P_n et P'_n .

On donne $P_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3$. En déduire l'expression de P_5 et celle de H_5 .

Comme à la question précédente, on a la relation $P_{n+1}(x) = -x.P_n(x) + P'_n(x)$.

$$D'où : P_5(x) = -x.P_4(x) + P'_4(x) = -x^5 + 6x^3 - 3x + 4x^3 - 12x = -x^5 + 10x^3 - 15x$$

$$Et H_5(x) = x^5 - 10x^3 + 15x$$

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 2^{ème} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

L'épreuve est composée de deux problèmes indépendants, à traiter dans un ordre quelconque.

Problème 1 :

1) Soit A la matrice carrée :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1a) Trouver les valeurs propres λ_1 et λ_2 ($\lambda_1 < \lambda_2$) et des vecteurs propres v_1 et v_2 associés de la matrice A.

On notera par D la matrice diagonale formée par les valeurs propres rangées dans l'ordre croissant.

L'équation caractéristique est $-\lambda(5 - \lambda) + 6 = 0$, soit $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$. Elle admet deux racines : $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$.

Vecteur propre associé à $\lambda_1 = 2$:

$$3x - 6y = 0$$

On prend (par exemple) $x = 2$ et $y = 1$

Vecteur propre associé à $\lambda_2 = 3$:

$$2x - 6y = 0$$

On prendra $x = 3$ et $y = 1$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1b) Donner l'expression d'une matrice régulière P telle que $A = P D P^{-1}$

La matrice P est formée par les vecteurs propres.

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Un calcul simple montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

On vérifie aisément $A = P D P^{-1}$

1c) En déduire la matrice A^n , n entier strictement positif.

Par construction, on a :

$$A^n = P D^n P^{-1}$$

En effectuant les produits, on trouve :

$$A^n = \begin{pmatrix} -2^{n+1} + 3^{n+1} & 3 \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot 3^{n+1} \\ -2^n + 3^n & 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n \end{pmatrix}$$

2) On considère la suite récurrente d'ordre 2 définie par :

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$$

$$\text{avec } u_0 = u_1 = 1$$

On note V_{n+2} le vecteur colonne $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$

2a) Montrer que $V_{n+2} = A V_{n+1}$

Le résultat est évident.

2b) En déduire l'expression du terme général u_n en fonction de n .

Partant de $V_{n+1} = A V_n$, et allant jusqu'à $V_2 = A V_1$, on en déduit :

$$V_{n+1} = A^n V_1, \text{ avec } (V_1)' = (1, 1)$$

$$\text{Or } V_{n+2} = (u_{n+1}, u_n)'$$

Pour avoir l'expression de u_n , il suffit de prendre la somme des termes de la deuxième ligne de A^n .

$$\text{Soit } u_n = -2^n + 3^n + 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n = 2^{n+1} - 3^n$$

2c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

$$u_n = 2^{n+1} - 3^n = 3^n (2(2/3)^n - 1) \text{ qui tend vers } -\infty \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Problème 2 :

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels.

Pour tout entier non nul n , on définit les sommes suivantes :

$$S_1(n) = 1 + 2 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k$$

$$S_2(n) = \sum_{k=1}^n k^2$$

$$S_3(n) = \sum_{k=1}^n k^3$$

Partie I :

1) Démontrer que $S_1(n) = n(n + 1)/2$.

On peut faire la démonstration par récurrence (classique), ou tout simplement écrire que $2 S_1(n) = (1 + 2 + \dots + n) + (n + n-1 + n-2 + \dots + 2 + 1) = (1+n) + (2 + n-1) + (3 + n-2) + \dots + (n-1 + 2) + (n + 1) = n(n + 1)$

D'où $S_1(n) = n(n + 1)/2$.

C'est ce calcul qui a été historiquement fait par Carl Gauss.

2) On désire établir une relation entre $S_3(n)$ et $S_1(n)$ de la forme $S_3(n) = h(S_1(n))$.

Le plan étant rapporté à un repère orthonormal usuel, d'origine O, on définit par leurs coordonnées les trois suites de points ci-après ($n \geq 1$) :

$$A_n (S_1(n), 0)$$

$$C_n (0, S_1(n))$$

$$B_n (S_1(n), S_1(n))$$

2a) Quelle est la forme du quadrilatère $Q_n = (O, A_n, B_n, C_n)$?

Le quadrilatère est un carré de côté $S_1(n)$.

La suite des quadrilatères Q_n est une suite croissante de carrés emboîtés, telle que $Q_n \subset Q_{n+1}$.

2b) Donner l'aire q_n de Q_n

L'aire q_n de Q_n n'est autre que $[S_1(n)]^2$.

2c) Pour $n \geq 2$, donner l'aire p_n du polygone $(A_{n-1}, A_n, B_n, C_n, C_{n-1}, B_{n-1}, A_{n-1})$

L'aire p_n du polygone est égale à $n.S_1(n-1) + n.S_1(n)$.

$$\text{Soit } p_n = n.S_1(n-1) + n.S_1(n) = n. (n-1)n/2 + n. n(n+1)/2 = n^3$$

2d) En déduire la relation $S_3(n) = h(S_1(n))$, et l'expression de $S_3(n)$ en fonction de n .

On passe du carré Q_{n-1} au carré Q_n en ajoutant le polygone.

Soit, en aires : $q_n = q_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n$

$$\text{Or } q_n = [S_1(n)]^2 ; \text{ et } q_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$$

$$\text{D'où : } S_3(n) = [S_1(n)]^2 = n^2 (n + 1)^2 / 4$$

Partie II :

On considère le polynôme à coefficients réels défini par :

$$P(x) = ax + bx^2 + x^3/3$$

et vérifiant la relation suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x + 1) - P(x) = x^2$$

1) Calculer $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(-1)$.

$$P(0) = 0$$

$$P(1) - P(0) = 0 \text{ d'où } P(1) = 0$$

$$P(2) = 1$$

$$P(3) = 4 + 1 = 5$$

$$P(x + 1) - x^2 = P(x) \text{ d'où } P(-1) = -1$$

2) Calculer les coefficients a et b .

A partir de $P(1)$ et $P(-1)$:

$$0 = a + b + 1/3$$

$$-1 = -a + b - 1/3$$

$$\Rightarrow b = -1/2 \text{ et } a = 1/6$$

$$P(x) = (x - 3x^2 + 2x^3)/6 = x(x - 1)(2x - 1)/6$$

3) Montrer que la somme $S_2(n)$ est égale à la valeur du polynôme P en un point que l'on précisera.

$$P(n+1) = P(n) + n^2$$

$$P(2) = P(1) + 1^2 = 1^2$$

En additionnant membre à membre, on en déduit :

$$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = P(n + 1)$$

4) Donner l'expression explicite de $S_2(n)$ en fonction de n .

$$S_2(n) = P(n+1) = (n + 1)(n + 1 - 1)(2n + 2 - 1)/6 = n(n + 1)(2n + 1)/6$$

Partie III :

On définit $I_3(n) = \sum_{k=1}^n (2k-1)^3$, somme des cubes des n premiers nombres impairs.

1) A l'aide des expressions de $S_1(n)$, $S_2(n)$ et $S_3(n)$ trouvées dans les deux premières parties, montrer que $I_3(n) = 2n^4 - n^2$.

$$(2k - 1)^3 = 8k^3 - 12k^2 + 6k - 1$$

On en déduit :

$$I_3(n) = 8 S_3(n) - 12 S_2(n) + 6 S_1(n) - n$$

En remplaçant les sommes par les expressions trouvées, après simplification, il s'en suit :

$$I_3(n) = 2n^4 - n^2.$$

2) Déterminer l'entier n tel que la somme des cubes des n premiers nombres entiers impairs soit égale à 29 161.

$$\text{Soit } X = n^2 \text{ (} X > 0 \text{)}$$

$$2X^2 - X - 29161 = 0$$

$$\Delta = 233289 = (483)^2$$

$$\text{Seule racine admissible en } X : X = 121$$

$$\text{D'où } n = 11.$$

La somme des cubes de 11 premiers nombres impairs (de 1 à 21) vaut 29161.

3) Donner en fonction de n l'expression de $U_3(n) = \sum_{k=1}^n (2k)^3$, somme des cubes des n premiers nombres pairs.

Première méthode :

$$U_3(n) = 8S_3(n) \Rightarrow U_3(n) = 8 n^2 (n + 1)^2 / 4 = 2n^2(n + 1)^2$$

Deuxième méthode:

$I_3(n) + U_3(n)$ n'est autre que la somme des cubes des $2n$ premiers nombres entiers.

$$2n^4 - n^2 + U_3(n) = (2n)^2 (2n + 1)^2 / 4$$

$$\Rightarrow U_3(n) = n^2(2n + 1)^2 - 2n^4 + n^2$$

$$= n^2(4n^2 + 4n + 1 - 2n^2 + 1) = 2n^2 (n + 1)^2$$

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE L'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Exercice n° 1

- 1) a) $E(X) = 12$ $V(X) = 4$
b) $E(Y) = 11$ $V(Y) = 1,143$
c) $E(Z) = 23$ $V(Z) = 4,571$

- 2) a) On a $E(Z) = E(X) + E(Y)$

Il ressort de cet exemple que la moyenne de la somme de deux variables est égale à la somme de leurs moyennes, ce qui était intuitivement évident.

b) $V(Z) \neq V(X) + V(Y)$

La variance de Z : somme des deux variables, est ici inférieure à la somme des variances de X et de Y . Cela signifie qu'une certaine compensation s'est opérée entre les fluctuations des dividendes distribués par ces deux sociétés. Les risques liés à la non régularité des produits financiers ont donc été diminués.

3) a) $\text{Cov}(X, Y) = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \right] - E(X)E(Y) = -0,286$

b) $A = 4,571$

c) On a $V(Z) = A$

d) $E(Z) = 11\,500$ et $V(Z) = 1\,142\,750$

4) $Z = 300 X + 700 Y$

$E(Z) = 11\,300$

$V(Z) = 799\,950$

5) a) $Z = 1\,000 \alpha X + 1000 (1 - \alpha) Y$

$$\begin{aligned} V(Z) &= (1000 \alpha)^2 V(X) + [1000 (1 - \alpha)]^2 V(Y) + 2 (1000)^2 \alpha (1 - \alpha) \text{Cov}(X, Y) \\ &= (1000 \alpha)^2 [V(X) + V(Y) - 2 \text{Cov}(X, Y)] + (1000)^2 \alpha [-2 V(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y)] + \\ &\quad (1000)^2 V(Y) \end{aligned}$$

La fonction $V(Z)$ est une fonction de α polynôme de degré 2 continue dérivable, dont la dérivée s'annule pour la valeur $\alpha_0 = \frac{V(Y) - \text{Cov}(X, Y)}{V(X) + V(Y) - 2\text{Cov}(X, Y)}$. En faisant un tableau de variation, on voit que $V(Z)$ est minimale pour α_0 . Numériquement on trouve $\alpha_0 = 0,25$: soit 25 % d'actions A et 75 % d'actions B.

b) $E(Z) = 11\,250$ euros $V(Z) = 785\,687,5$

c) On peut se rendre compte que la plus grande régularité des revenus (variance minimale) donne une rentabilité moindre (moyenne).

Exercice n° 2

1) Le nombre de désistements suit une loi binomiale de paramètres $n = 300$ et $p = 0,02$

2) $P(X = 3) = 0,0883$
 $P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5) = P(X > 4) = 0.7177$

3) a) Évident

b) $\Delta = 800 \sum_{x=1}^k xP(X = x) - 500k + 800k P(X > k)$

A partir du tableau fourni, on calcule Δ pour k donné

k	Δ
0	0
1	298
2	585
3	837
4	1018
5	1092
6	1037
7	852
8	556

On trouve que pour $k = 5$, la différence est maximale.