ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

En 2001, 246 millions d'enfants à travers le monde étaient astreints à un travail nuisible à leur santé ou à leur éducation, y compris dans des pays signataires de la Déclaration des Droits de l'Enfant, alors même que celle-ci l'interdit. Selon vous, quels sont les obstacles rencontrés dans l'éradication du travail des enfants ?

Sujet n° 2

« La famille sera toujours la base des sociétés » écrivait Honoré de Balzac, auteur français du 19è siècle. Qu'en pensez-vous ?

Sujet n° 3

Quel est le rôle des contes dans la société africaine ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

L'épreuve est composée d'un seul problème comportant quatre parties autonomes, qui peuvent être traitées dans un ordre quelconque. R désigne l'ensemble des nombres réels et R^+ l'ensemble des nombres réels positifs.

Préambule :

Dans tout le problème, on admettra les résultats suivants :

a) $\forall a \in R$, $\forall x > 0$, l'intégrale $f_a(x) = \int_x^{+\infty} t^a e^{-t^2/2} dt$ existe et est convergente

b) $\forall a > -1$, l'intégrale $g(a) = f_a(0)$ existe

c) $g(0) = f_0(0) = (\pi/2)^{1/2}$

Partie A : a = 0, étude de la fonction f_0

On considère la fonction f_0 définie sur R^+ par :

$$f_0(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt$$

1) En découpant l'intégrale sur $[x, +\infty[$ en une intégrale sur $[x, 1[$ et une intégrale sur $[1, +\infty[$, montrer que f_0 est, en fait, définie sur R.

2) Interpréter précisément la fonction $f_0 / (2\pi)^{1/2}$ en termes de probabilités.

3) Donner les valeurs des limites de f_0 quand x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.

<u>Partie B</u> : a > – 1, étude de l'intégrale g(a)

En fonction des notations vues dans le préambule, l'intégrale g(a) est définie par :

$$g(a) = f_a(0) = \int_0^{+\infty} t^a \, e^{-t^2/2} \, dt$$

1) Calculer g(1) et g(2).

2) A l'aide d'une intégration par parties, établir la relation :

$$g(a + 2) = (a + 1)g(a)$$

3) Pour tout nombre entier n, écrire g(a + 2n) en fonction de g(a + 2(n – 1)).
En déduire l'expression de g(a + 2n) en fonction de g(a).

4) Soit m un nombre entier. On veut donner l'expression de g(m) en fonction de m.

4a) Démontrer que $1\times3\times5\times \ldots\times(2n - 1) = (2n)! / 2^n.n!$

4b) Donner les expressions de g(m) en fonction de m pour m pair, m = 2p, puis pour m impair, m = 2p + 1.

<u>Partie C</u> : a > – 1, étude de la fonction f_a

On considère la fonction f_a définie sur R^+ pour tout a > – 1 par :

$$f_a(x) = \int_x^{+\infty} t^a \, e^{-t^2/2} \, dt$$

1) Montrer que la fonction f_a est dérivable sur]0, + ∞ [.
En déduire $(f_a)'$ et $(f_a)''$, respectivement dérivée d'ordre 1 et 2 de f_a.

2) Quel est le sens de variation de f_a sur]0, + ∞ [?

3) Etudier la limite de f_a quand x tend vers + ∞.
(on pourra couper l'intégrale sur [x, + ∞ [en une intégrale sur [x, 1 [et une intégrale sur [1, + ∞ [)

4) *Dans toute cette question, on se restreint à a > 0.*

4a) Montrer que f_a est continue sur [0, + ∞ [.

4b) En déduire que $\lim_{x\to0} f_a'(x) = f_a'(0) = 0$.

4c) Dresser le tableau de variations de f_a et donner la forme de sa courbe.

5) *Dans toute cette question, on se restreint à $-1 < a < 0$.*

5a) Montrer que f_a est continue sur $[0, +\infty[$.

5b) Calculer $\lim\limits_{x \to 0} f_a'(x)$. La fonction f_a est-elle dérivable en 0 ?

5c) Dresser le tableau de variations de f_a et donner la forme de sa courbe.

6) Pour toute la suite du problème, on revient au cas général $a > -1$.
A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que :

$$f_a(x) = x^{a-1} e^{-x^2/2} + (a-1) f_{a-2}(x)$$

7) A partir de la relation établie à la question 6, étudier le signe de $f_a(x) - x^{a-1} e^{-x^2/2}$.

8) Démontrer que, pour tout $a > -1$, on a la majoration suivante :

$$\left| f_a(x) - x^{a-1} e^{-x^2/2} \right| \le |a-1| \, . \, f_a(x) / x^2$$

En déduire que, quand x tend vers $+\infty$, on a l'équivalent :

$$f_a(x) \sim x^{a-1} e^{-x^2/2}$$

9) Dans le cas où $-1 < a \le 1$, montrer que la majoration trouvée à la question 8 peut être améliorée en :

$$\left| f_a(x) - x^{a-1} e^{-x^2/2} \right| \le 2 \, x^{a-3} e^{-x^2/2}$$

<u>Partie D</u> : polynômes de Hermite

On considère la fonction h définie sur R par $h(x) = e^{-x^2/2}$.

1) Etudier précisément les variations et donner la forme du graphe de h.

2) Donner l'expression de la dérivée $h'(x)$ en fonction de $h(x)$.

3) Montrer que $h''(x) = P_2(x).h(x)$ et $h'''(x) = P_3(x).h(x)$, où P_2 et P_3 sont des polynômes respectivement de degré 2 et 3.

4) Montrer rigoureusement que la dérivée d'ordre n de h, $h^{(n)}(x)$, peut être écrite sous la forme $P_n(x).h(x)$, où P_n est un polynôme de degré n ne comportant que des puissances paires de x si n est pair, ou uniquement des puissances impaires de x si n est impair.
Le polynôme $H_n(x) = (-1)^n P_n(x)$ est appelé polynôme de Hermite. Ecrire H_1, H_2, H_3.

5) Etablir une relation entre P_{n+1}, P_n et P'_n.
On donne $P_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3$. En déduire l'expression de P_5 et celle de H_5.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ÉCONOMIE

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des deux sujets suivants.

Sujet n° 1

A l'heure de la globalisation financière, l'accroissement du taux d'épargne constitue-t-il un préalable à celui des investissements et au raffermissement de la croissance dans les économies en développement ? Après un rappel détaillé des différentes dimensions théoriques du sujet, vous présenterez quelques illustrations passées et récentes.

Sujet n° 2

Depuis les années 2000, la littérature théorique parle le plus souvent de « peur du flottement », pour désigner le choix, par les économies émergentes, soit d'un régime de change fixe, soit d'un système de flexibilité fortement administré. En vous appuyant sur la théorie économique, et en particulier sur le modèle de Mundell-Fleming, vous chercherez à déterminer s'il existe un régime de change optimal pour les économies en développement.

Dans un premier temps, vous rappellerez les conséquences du choix d'un régime de change sur les grands équilibres internes et externes, et sur les politiques macroéconomiques.

Dans un second temps, vous illustrerez la réponse à la question du régime de change optimal par des exemples choisis dans les économies en développement.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'épreuve est composée de deux problèmes indépendants, à traiter dans un ordre quelconque.

Problème 1 :

1) Soit A la matrice carrée :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1a) Trouver les valeurs propres λ_1 et λ_2 ($\lambda_1 < \lambda_2$) et des vecteurs propres v_1 et v_2 associés de la matrice A.
On notera D la matrice diagonale formée par les valeurs propres de A rangées dans l'ordre croissant.

1b) Donner l'expression d'une matrice régulière P telle que $A = P D P^{-1}$

1c) En déduire la matrice A^n, n entier strictement positif.

2) On considère la suite récurrente d'ordre 2 définie par :

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$$
$$\text{avec } u_0 = u_1 = 1$$

On note V_{n+2} le vecteur colonne $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$

2a) Montrer que $V_{n+2} = A\, V_{n+1}$

2b) En déduire l'expression du terme général u_n en fonction de n.

2c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Problème 2 :

N désigne l'ensemble des nombres entiers naturels.

Pour tout entier non nul n, on définit les sommes suivantes :

$$S_1(n) = 1 + 2 + ... + n = \sum_{k=1}^{n} k$$

$$S_2(n) = \sum_{k=1}^{n} k^2$$

$$S_3(n) = \sum_{k=1}^{n} k^3$$

<u>Partie I</u> :

1) Démontrer que $S_1(n) = n(n + 1)/2$.

2) On désire établir une relation entre $S_3(n)$ et $S_1(n)$ de la forme $S_3(n) = h(S_1(n))$.
Le plan étant rapporté à un repère orthonormal usuel, d'origine O, on définit par leurs coordonnées les trois suites de points ci-après ($n \geq 1$):

A_n $(S_1(n), 0)$

C_n $(0, S_1(n))$

B_n $(S_1(n), S_1(n))$

2a) Quelle est la forme du quadrilatère $Q_n = (O, A_n, B_n, C_n)$?

2b) Donner l'aire q_n de Q_n

2c) Pour $n \geq 2$, donner l'aire p_n du polygone $(A_{n-1}, A_n, B_n, C_n, C_{n-1}, B_{n-1}, A_{n-1})$

2d) En déduire la relation $S_3(n) = h(S_1(n))$, et l'expression de $S_3(n)$ en fonction de n.

<u>Partie II</u> :

On considère le polynôme à coefficients réels défini par :

$$P(x) = ax + bx^2 + x^3/3$$

et vérifiant la relation suivante :

$$\forall x \in R,\ P(x + 1) - P(x) = x^2$$

1) Calculer P(0), P(1), P(2), P(3), P(-1).

2) Calculer les coefficients a et b.

3) Montrer que la somme $S_2(n)$ est égale à la valeur du polynôme P en un point que l'on précisera.

4) Donner l'expression explicite de $S_2(n)$ en fonction de n.

<u>Partie III</u> :

On définit $I_3(n) = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3$, somme des cubes des n premiers nombres impairs.

1) A l'aide des expressions de $S_1(n)$, $S_2(n)$ et $S_3(n)$ trouvées dans les deux premières parties, montrer que $I_3(n) = 2n^4 - n^2$.

2) Déterminer l'entier n tel que la somme des cubes des n premiers nombres entiers impairs soit égale à 29 161.

3) Donner en fonction de n l'expression de $U_3(n) = \sum_{k=1}^{n} (2k)^3$, somme des cubes des n premiers nombres pairs.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

***Note* : L'épreuve est composée d'exercices indépendants qui peuvent être traités dans un ordre indifférent. La note finale tiendra compte, de façon non négligeable, des commentaires demandés explicitement.**

Exercice n° 1

Le service financier d'une société d'investissement étudie la rentabilité de son portefeuille d'actions acquises en 1999 et composé en actions A et en actions B. Les dividendes perçus au titre des exercices 1999 à 2005 sont réévalués à l'aide d'un indice d'inflation des prix du Produit Intérieur Brut. Le directeur décide en outre de ne pas tenir compte des plus-values sur valeur de revente de ces deux titres. Les rentabilités pour 100 euros investis initialement dans chaque titre, sont données dans les premières colonnes du tableau ci-dessous.

Dans tout l'exercice, les résultats seront donnés avec une précision de 10^{-3}.

Tableau

Calcul de la variance du portefeuille d'actions constitué par 50% d'actions A et 50% d'actions B

I	Année	Dividendes versés pour 100 euros investis		Calculs complémentaires (pour un portefeuille de 200 euros)				
		A x_i	B y_i	$z_i = x_i + y_i$	x_i^2	y_i^2	z_i^2	$x_i\ y_i$
1	1999	14	11	25	196	121	625	154
2	2000	11	12	23	121	144	529	132
3	2001	15	12	27	225	144	729	180
4	2002	12	9	21	144	81	441	108
5	2003	13	10	23	169	100	529	130
6	2004	10	11	21	100	121	441	110
7	2005	9	12	21	81	144	441	108
$\sum$	-	84	77	161	1036	855	3735	922

La variable X est définie comme le dividende versé pour 100 euros dans les actions A ;

La variable Y est définie comme le dividende versé pour 100 euros dans les actions B ;

La variable Z est définie comme le dividende versé pour 100 euros dans les actions A et 100 euros dans les actions B.

Question 1

a) Calculer E(X) et V(X) (E désignant l'espérance mathématique et V la variance)
b) Calculer E(Y) et V(Y)
c) Calculer E(Z) et V(Z)

Question 2

a) Comparer E(Z) et E(X) + E(Y). Commenter
b) Comparer V(Z) et V(X) + V(Y). Commenter

Question 3

a) Calculer la Covariance entre X et Y (donner la formule)
b) Calculer A = V(X) + V(Y) + 2 COV(X,Y)
c) Comparer V(Z) et A
d) Calculer le dividende moyen annuel versé entre 1999 et 2005, ainsi que la variance, d'un portefeuille de 100 000 euros constitué de 50% d'actions A et de 50% d'actions B.

Question 4

Plus généralement, on montre que si Z=aX + bY, on a :

- $E(Z) = a\,E(X) + b\,E(Y)$
- $V(Z) = a^2\,V(X) + b^2\,V(Y) + 2ab\,COV(X,Y)$

A l'aide des relations précédentes, vous calculerez le dividende moyen annuel versé entre 1999 et 2005 (ainsi que la variance) d'un portefeuille de 100 000 euros constitué à raison de 30% d'actions A et de 70% d'actions B (au lieu des 50%-50% initialement choisis).

Question 5

Les relations données à la question précédente permettent également de définir la composition du portefeuille de 100 000 euros qui a la variance de Z la plus faible, c'est-à-dire dont le revenu annuel, entre 1999 et 2005, a été le plus régulier.

a) Calculer cette répartition (vous pourrez désigner par α la part que représentent les actions A dans le portefeuille et chercher V(Z) en fonction de α)

b) Calculer E(Z) pour la répartition obtenue à la question précédente (5a)

c) Commenter

Exercice n° 2

Une agence de voyage possède un certain nombre de villages-clubs, chacun d'une capacité de 300 places. Les conditions de réservation sont assez avantageuses pour la clientèle, et c'est d'ailleurs l'un des arguments commerciaux qui doit affronter une forte concurrence sur le marché des villages-clubs. Le taux des défections est loin d'être négligeable, puisqu'il est de l'ordre de 2 %, aussi le potentiel offert est-il mal exploité car, jusqu'à maintenant, les réservations se limitaient à 300 places et aucune liste d'attente efficace n'avait pu être mise en place. Cette agence de voyage étudie la possibilité d'émettre des réservations conditionnelles (RC) pour mieux remplir ses villages-clubs. Ces RC donneront lieu à un dédommagement (égal au double des arrhes) si l'agence ne peut satisfaire le client ayant acheté ce billet RC.

1) Donner la loi du nombre de désistements pour un village-club dans le système antérieur (300 réservations, sans émission de RC).

2) A partir du tableau ci-après, donner la probabilité qu'il y ait 3 défections, puis celle d'avoir 5 défections ou plus, pour une semaine donnée dans un village-club.

3) Si le bénéfice marginal par client est de l'ordre de 300 euros, et si le coût du dédit est de 500 euros, se pose le problème du nombre maximal de billets RC que l'agence accepte d'émettre. Le raisonnement est le suivant. Pour un nombre maximal k de billets RC émis, l'espérance de gain est :

$$\sum_{x=1}^{k} 300\, x\, P(X = x) + 300\, k\, P(X > k)$$

tandis que l'espérance de perte est : $\sum_{x=1}^{k} 500\,(k - x)\, P(X = x)$

a) Justifier les formules.

b) Il suffit donc de rechercher par tâtonnement, en faisant varier k, pour quelle valeur de k la différence entre l'espérance de gain et l'espérance de perte est la plus forte. Pour déterminer ce nombre optimal de réservations conditionnelles, on s'aidera du tableau ci-dessous :

Tableau

X	$P(X = x)$	$x\,P(X = x)$	$\sum_{y=1}^{x} y\,P(X=y)$	$P(X > x)$
0	0,0023	0,0000	0,0000	0,9977
1	0,0143	0,0143	0,0143	0,9834
2	0,0436	0,0872	0,1015	0,9398
3	0,0883	0,2649	0,3664	0,8515
4	0,1338	0,5352	0,9016	0,7177
5	0,1617	0,8085	1,7101	0,5560
6	0,1623	0,9738	2,6839	0,3937
7	0,1391	0,9737	3,6576	0,2546
8	0,1040	0,8320	4,4896	0,1506