AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

L'épreuve est composée d'un exercice et deux problèmes, indépendants, à traiter dans un ordre quelconque.-

Le symbole Ln désigne le logarithme népérien.

Exercice :

On considère la suite u(n) définie sur l'ensemble des nombres entiers naturels par la relation :
$u(n+1) = u(n)\, e^{-u(n)}$
avec comme valeur initiale u(0) = 1.

Pour tout n entier, la suite v(n) est définie par la relation :

$$v(n) = \sum_{p=0}^{n} u(p)$$

1) Etudier le signe et le sens de variation de u(n).

Montrons par récurrence la positivité de u(n) :

- Vraie au niveau 0 : u(0) = 1

- Soit la propriété vraie au rang n : u(n) > 0

Comme $u(n+1) = u(n)\, e^{-u(n)}$ et que $e^{-u(n)} > 0$, on a donc u(n+1) > 0.

Par ailleurs : $u(n+1)/u(n) = e^{-u(n)} < 1$

La suite u(n) est donc décroissante.

2) Trouver la limite de u(n) quand $n \to +\infty$.

Comme u(n) est décroissante et minorée, elle converge.

Soit a la limite de u(n).
a vérifie l'équation $a = a.e^{-a}$ ou encore $a.(1 - e^{-a}) = 0$.
Or $(1 - e^{-a}) \neq 0 \Rightarrow a = 0$

3) Montrer que u(n+1) = f(v(n)), où f est une fonction que l'on explicitera.
En déduire la limite de v(n) quand n $\to +\infty$.

Partant de $u(n+1) = u(n)\, e^{-u(n)}$, …., $u(1) = u(0)\, e^{-u(0)}$ et en multipliant toutes ces égalités membre à membre, on obtient :

$u(n+1) = u(0)\, e^{-v(n)} = e^{-v(n)}$

$v(n) = -\, \mathrm{Ln}\, u(n+1)$

Quand n $\to +\infty$, u(n) tend vers 0 et donc v(n) tend vers $+\infty$.

Problème 1 :

On donne : Ln3 = 1,099.

Partie I :

Soit φ la fonction définie sur]0, $+\infty$[par :

$$\varphi(x) = \mathrm{Ln}x / x$$

Etudier les variations de φ et donner très précisément son tableau de variation.
Donner l'équation de la tangente au point d'abscisse 1.
Tracer le graphe de φ.

Dérivée première :
$\varphi'(x) = (1 - \mathrm{Ln}x)/x^2$

$\varphi'(x) = 0$ pour x = e ; $\varphi'(x) > 0$ pour x < e et <0 pour x > e.
φ est donc croissante pour x < e et décroissante pour x > e.
Le maximum M de φ est atteint en x = e et vaut $\varphi(e) = M = 1/e \approx 0{,}368$

Dérivée seconde :
$\varphi''(x) = (2\mathrm{Ln}x - 3)/x^3$

Le point d'inflexion est atteint en $\varphi''(x) = 0$, soit pour $x = e^{3/2} \approx 4{,}481$, et $\varphi(e^{3/2}) \approx 0{,}335$.

Limites :
Quand x $\to +\infty$, $\varphi(x)$ tend vers 0 (y = 0 est asymptote horizontale).
Quand x $\to 0$ par valeurs supérieures, $\varphi(x) \to -\infty$.

Points caractéristiques :

Outre le maximum et le point d'inflexion, on remarque que $\varphi(1) = 0$.
La courbe représentant φ coupe l'axe des abscisses au point A (1, 0) ; en ce point, la pente est $\varphi'(1) = 1$.
L'équation de la tangente en A est y = x – 1.

Partie II :

Soit a et b deux nombres réels strictement positifs.

1) Calculer a^b et b^a pour a = 2 et b = 3, pour a = 4 et b = 2, et pour a = Ln3 et b = 3.

Pour a = 2 et b = 3 : $a^b = 8$, $b^a = 9$.
Pour a = 4 et b = 2, $a^b = 16$, $b^a = 16$.
Pour a = Ln3 et b = 3, $a^b = 1{,}327$, $b^a = 3{,}345$.

2) Montrer que comparer a^b et b^a revient à rechercher le signe de $ab(\varphi(a) - \varphi(b))$.

Comparer a^b et b^a revient à comparer à 1 le rapport $R = a^b / b^a$.

$R > 1 \Leftrightarrow LnR > 0 \Leftrightarrow b.Lna - a.Lnb > 0 \Leftrightarrow ab(Lna/a - Lnb/b) > 0 \Leftrightarrow ab(\varphi(a) - \varphi(b)) > 0$.

Comme a et b > 0, $R > 1 \Leftrightarrow a^b > b^a \Leftrightarrow \varphi(a) - \varphi(b) > 0$.
Inversement, $R < 1 \Leftrightarrow a^b < b^a \Leftrightarrow \varphi(a) - \varphi(b) < 0$.
Et $R = 1 \Leftrightarrow a^b = b^a \Leftrightarrow \varphi(a) - \varphi(b) = 0$.

3) En déduire la comparaison de a^b et b^a dans les cas suivants :

3a) $0 < a < b \leq e$
3b) $e \leq a < b$

Compte tenu des variations de la fonction φ vues à la question 1, pour $0 < a < b \leq e$, comme on sait que φ est croissante pour $x < e$, on a $\varphi(a) < \varphi(b)$ et donc $a^b < b^a$ d'après les résultats de la question 2.

De même, pour $e \leq a < b$, comme φ est décroissante pour $x > e$, on a $\varphi(a) > \varphi(b)$ et donc $a^b > b^a$.

4) Sans faire le moindre calcul, comparer π^e et e^π.

Comme $e < \pi$, on est dans les conditions de la question (3b) et donc $e^\pi > \pi^e$.

5) Montrer que pour tout a > e, il existe un réel b appartenant à l'intervalle]1, e [tel que $\varphi(b) = \varphi(a)$. En déduire que $a^b = b^a$.

Soit a > e. On sait que φ est croissante de $-\infty$ à M = 0,368 pour x < e, passe par un maximum M = 0,368 en x = e et décroît ensuite de 0,368 vers 0.
Pour a > 0, $0 < \varphi(a) < M$; compte tenu de la croissance stricte et de la continuité de φ pour x < e, et de sa positivité pour 1 < x < e, on en déduit qu'il existe donc un et un seul nombre $b \in]1, e[$ tel que $\varphi(b) = \varphi(a)$.
Au vu des résultats de la question 2, on a bien $a^b = b^a$ pour ce couple (a, b).

Partie III :

On prend maintenant a = 3, et on cherche à résoudre l'équation $3^x = x^3$.

1) Soit g la fonction définie sur] 0, $+\infty$[par :

$$g(x) = 3Lnx - xLn3$$

Etudier les variations de g.

On remarque a = 3 > e. On est ainsi dans les conditions de la question 4 de la partie II.

$3^x = x^3 \Leftrightarrow 3Lnx - xLn3 = g(x) = 0.$

$g'(x) = (3 - xLn3)/3$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3/Ln3 \approx 2{,}730.$

g est croissante pour $0 < x < 3/Ln3$, passe par un maximum $\approx 0{,}012$, puis décroît.

En outre : $g(x) \to -\infty$ quand $x \to 0$, et $g(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.

2) Etablir l'existence de deux réels x_1 et x_2, avec $x_1 < x_2$, tels que $g(x_1) = g(x_2) = 0$.
Donner la valeur (évidente) de x_2.
En déduire une valeur approchée de la solution de l'équation $3^x = x^3$.

D'après les résultats de la question précédente, la courbe représentative de g continue coupe donc l'axe des abscisses en deux points x_1 et x_2, tels que $g(x_1) = g(x_2) = 0$, avec $x_1 < 3/Ln3 = 2{,}730 < x_2$.

Une solution évidente aux équations $3^x = x^3 \Leftrightarrow 3Lnx - xLn3 = g(x) = 0$ est $x = 3 = x_2$.

Pour trouver x_1, on procède par itération :

$g(2{,}5) = 0{,}0005 > 0$

$g(2{,}45) = -0{,}0045 < 0$

$g(2{,}49) = -0{,}0005 < 0$

$2{,}49 < x_1 < 2{,}50$

On peut approximer x_1 par 2,495, ou bien poursuivre l'itération avec 3 décimales, ce qui conduit à 2,498.

Problème 2 :

N est l'ensemble des entiers naturels, N* = N – {0} ; Z est l'ensemble des entiers relatifs ; R est l'ensemble des nombres réels.

Soit f une fonction réelle d'une variable réelle.
On suppose que, pour tout $(x,y) \in R^2$, f vérifie la relation (E) :

(E) $f(x+y) = [f(x) + f(y)] / [1 + f(x)f(y)]$

1) Montrer que s'il existe un nombre réel a tel que f(a) = 1 ou f(a) = – 1, la fonction f est constante sur R.
Dans toute la suite, on supposera f non constante.

Soit a tel que f(a) = 1.
Alors $f(x+a) = [f(x) + 1] / [1 + f(x)] = 1 \ \forall x$, donc la fonction f est constante et égale à 1.

De même, s'il existe a tel que f(a) = – 1, il est facile de montrer que f est constante et égale à – 1.

2) On écrit x = (x/2) + (x/2).

2a) Montrer que $-1 < f(x) < 1, \ \forall x \in R$

2b) Montrer que f(0) = 0

2c) Montrer que f est impaire

2a) $f(x) = f((x/2) + (x/2)) = 2f(x/2) / (1 + f^2(x/2))$

Or $(1 - u)^2 = 1 + u^2 - 2u > 0 \Leftrightarrow 2u < 1 + u^2$ et $(1 + u)^2 = 1 + u^2 + 2u > 0 \Leftrightarrow 2u > -(1 + u^2)$, soit : $-(1 + u^2) < 2u < (1 + u^2)$
D'où : $-1 < 2u/(1 + u^2) < 1$.
En posant u = f(x/2), on obtient donc $-1 < f(x) < 1$.

2b) Faisons x = 0 dans la relation précédente :
$f(0) = 2f(0)/(1 + f^2(0)) \Leftrightarrow f(0)(f^2(0) - 1) = 0$.
Comme $-1 < f(x) < 1, \ \forall x \in R, f^2(0) - 1 \neq 0$ d'où f(0) = 0.

2c) $f(x - x) = f(0) = 0 = (f(x) + f(-x))/(1 + f(x).f(-x)) \Leftrightarrow f(x) + f(-x) = 0 \Leftrightarrow f(-x) = - f(-x)$.
f est donc comprise strictement entre – 1 et 1, s'annule en 0 et est impaire.

3) On pose $g(x) = [1 + f(x)]/[1 - f(x)]$.

3a) Démontrer par récurrence que, pour tout réel x et pour tout entier n strictement positif :

$g(nx) = g^n(x)$

- Propriété vraie par construction pour n = 1

- Supposons $g(nx) = g^n(x)$ et montrons que $g((n+1)x) = g^{n+1}(x)$

Par définition, $g((n+1)x) = [1 + f((n+1)x)]/ [1 - f((n+1)x)]$
Or $f((n+1)x) = [f(nx) + f(x)] / [1 + f(nx)f(x)]$.
Reportons cette expression de $f((n+1)x)$ dans la définition de $g((n+1)x)$:

$$g((n+1)x) = [1 + f(nx)f(x) + f(nx) + f(x)]/ [1 + f(nx)f(x) - f(nx) - f(x)]$$

$$g((n+1)x) = (1 + f(nx))(1 + f(x))//(1 - f(nx))(1 - f(x)) = g(nx).g(x) = g^{n+1}(x)$$

3b) On note $\lambda = g(1)$. Pour tout entier n naturel, donner la valeur de f(n) en fonction de λ.

On a : $g(nx) = g^n(x)$. Posons x = 1: $g(n) = g^n(1) = \lambda^n$.

Comme $g(n) = [1 + f(n)]/[1 - f(n)] = \lambda^n$, on en déduit :

$1 + f(n) = \lambda^n(1 - f(n))$
$\Rightarrow f(n) = (\lambda^n - 1) / (\lambda^n + 1)$

3c) En déduire f(n) pour tout n appartenant à Z, ensemble des nombres entiers relatifs.

On a démontré que f est impaire.
Soit $p \in Z$.

Si p > 0, la formule de la question (3b) s'applique.
Si p < 0, $f(p) = - f(-p) = - (\lambda^{-p} - 1) / (\lambda^{-p} + 1) = (\lambda^p - 1) / (\lambda^p + 1)$

Donc $\forall p \in Z$, $f(p) = (\lambda^p - 1) / (\lambda^p + 1)$

4) On suppose maintenant, et pour toute la suite de l'énoncé, que f, en plus de vérifier la relation (E), est dérivable au point 0. On note d la dérivée de f en 0.

4a) Montrer que f est dérivable en tout point réel x et que $f'(x) = d(1 - f^2(x))$.

Par définition, la dérivée de f en un point x est $\lim_{h\to 0}(f(x+h) - f(x))/h$.

$\forall x \quad f(x+h) = (f(x) + f(h)) / (1 + f(x)f(h))$

D'où $(f(x+h) - f(x))/h = f(h)[1 - f^2(x)]/h(1 + f(x)f(h))$

Quand h tend vers 0, f(h)/h tend vers d, et f(h) tend vers 0.

Donc $\forall x \lim_{h\to 0}(f(x+h) - f(x))/h = f'(x) = d(1 - f^2(x))$

4b) Le nombre d peut-il être nul ?

Si d = 0, $f'(x) = 0\ \forall x$, donc f(x) est une constante, ce qui est contraire à la convention prise à la question 1.

4c) Montrer que f est monotone sur R.

Puisque que $-1 < f(x) < 1,\ \forall x \in R$ (question 2a), $1 - f^2(x) > 0$. le signe de f' est donc celui de la constante d, dérivée de f au point 0.
La fonction f est monotone (croissante si d > 0, décroissante si d < 0).

5) On note f^{-1} la fonction réciproque de f. On admet que f^{-1} est dérivable sur] –1, 1 [.

5a) Donner l'expression de la dérivée de f^{-1} en tout point de] – 1, 1 [.

f^{-1}, fonction réciproque de f, existe car f est continue, dérivable, et strictement monotone ; c'est donc une bijection de R^{*+} dans] – 1, 1 [.

Soit y = f(x), $-1 < y < 1$, et $x = f^{-1}(y)$.

On sait que $(f^{-1})'(y) = 1 / f'(y)$, ce qui conduit à :

$(f^{-1})'(y) = 1/d(1 - y^2)$

5b) En déduire f^{-1}.

Connaissant $(f^{-1})'$, on a f^{-1} en cherchant une primitive H :

$1/(1 - y^2) = 1/2(1 - y) + 1/2(1 + y)$

Soit $H(y) = [Ln(1+y)/(1-y)]/2 + K$

Or on sait que f(0) = 0 et donc $f^{-1}(0) = 0$.
La constante K est telle que H(y) = 0, soit K = 0.

$f^{-1}(y) = [Ln(1+y)/(1-y)]/2$

5c) En déduire alors l'expression de f.

On déduit de ce qui précède : $x = f^{-1}(y) = [Ln(1+y)/(1-y)]/2$

$[Ln(1+y)/(1-y)] = 2x$

$(1+y)/(1-y) = e^{2x}$

$\Rightarrow y = f(x) = (e^{2x} - 1)/(e^{2x} + 1)$

AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Problème 1 :

E est un espace vectoriel sur R, de dimension 3, de base B = (e_1, e_2, e_3) ; T est l'espace vectoriel sur R des matrices carrées d'ordre 3, à coefficients réels. O est la matrice nulle, I la matrice identité de T.

Soit U un élément de T, $U \neq O$ et $U \neq I$.

On définit l'application φ_U de T dans T par : $\varphi_U(X) = UX - XU$.

1) Montrer que φ_U est linéaire.

Soient a et b deux réels, X et Y deux éléments de T.
$\varphi_U(aX+bY) = U(aX+bY) - (aX+bY)U = aUX + bUY - aXU - bYU$
$= a(UX - XU) + b(UY - YU)$
$= a\varphi_U(X) + b\varphi_U(Y)$

2) L'application φ_U est-elle une bijection ?

I étant la matrice identité de T, $\varphi_U(I) = UI - IU = U - U = O$
I appartient donc au noyau de φ_U.
Ker $\varphi_U \neq \{0\} \Rightarrow \varphi$ n'est pas injective et donc non bijective.

Problème 2 :

On considère le système (S) suivant, composé de deux équations à deux inconnues réelles x et y :

$$\begin{cases} ax - by = c \\ x - 2y = 3 \end{cases}$$

Les paramètres a, b et c sont obtenus en lançant trois fois consécutives, de façon indépendante, un dé supposé parfait, à six faces numérotées de 1 à 6. Le premier lancer donne la valeur de a, le deuxième celle de b et le troisième celle de c.

1) Combien y a-t-il de valeurs possibles pour le triplet (a, b, c) ?

Il y a 6^3 = 216 possibilités pour le triplet (a, b, c)

Dans toute la suite du problème, on donnera les probabilités demandées sous forme de fraction de dénominateur 108.

2) Calculer la probabilité P_1 pour que (S) ait une infinité de solutions.

Pour que (S) ait une infinité de solution, les deux équations doivent être proportionnelles, soit :

a = 1, b = 2 et c = 3
ou
a = 2, b = 4 et c = 6

Aucune autre configuration de tirages ne conduit à la même équation x – 2y = 3.
La probabilité P_1 pour que (S) ait une infinité de solutions est donc 2/216 = 1/108.

3) Calculer la probabilité P_2 pour que (S) n'admette aucune solution.

Pour qu'il n'y ait pas de solution, il faut que b – 2a = 0.
Cela conduit à :

a = 1, b = 2, et c ≠ 3 (car si c = 3, on est dans le cas précédent)
a = 2, b = 4, et c ≠ 6
a = 3, b = 6, et c prend n'importe quelle valeur

Soit au total 5 + 5 + 6 = 16 cas possibles.
La probabilité P_2 pour que (S) n'admette aucune solution est 16/216 = 8/108.

4) Calculer la probabilité P_3 pour que (S) admette une solution unique.

Il existe une et une seule solution si b – 2a ≠ 0.
Soit :

a = 1, b = 1, 3, 4, 5, 6 , ∀ c
a = 2, b = 1, 2, 3, 5, 6 , ∀ c
a = 2, b = 1, 2, 3, 4, 5 , ∀ c
a = 4, ∀ b, ∀ c
a = 5, ∀ b, ∀ c
a = 6, ∀ b, ∀ c

Cela représente 3 x 6 x 5 + 3 x 36 = 198 cas possibles.
La probabilité P_3 pour que (S) admette une solution unique est 198/218 = 99/108.

On vérifie $P_1 + P_2 + P_3 = 1$.

5) Calculer la probabilité P_4 pour que (S) admette le couple (x = 3, y = 0) comme unique solution.

Si (3, 0) est solution : 3a – 0 = c
⇒ a = 1 et c = 3, ou a = 2 et c = 6, et b est quelconque.
P_4 = 12/216 = 6/108

Problème 3 :

Partie I :

Soit k un nombre réel strictement positif.
On considère la fonction f définie sur] 0, $+\infty$[par :

$f_k(x) = k^2x^2 – (Lnx)/2 – 1/4$

1) Etudier les variations de f_k.

$f_k'(x) = 2k^2x – 1/2x = (2kx – 1)(2kx + 1)/2x$
$f_k(1/2k) = (Ln(2k))/2$

f_k est décroissante de 0 à 1/2k, passe par le minimum (1/2k, (Ln2k)/2), puis croît ensuite, avec une branche parabolique.
Lim $_{x\to0}$ $f_k(x) = +\infty$, lim $_{x\to+\infty}$ $f_k(x) = +\infty$.

2) Soit M(k) le point correspondant au minimum de f_k.
Donner l'équation de l'ensemble des points M(k) quand k décrit] 0, $+\infty$[.

Les coordonnées de M(k) sont (1/2k, (Ln(2k))/2).
L'équation de la courbe représentant les points M(k) est y = – (Lnx)/2.

Partie II :

On prend dans cette partie k = 1/2. On notera f la fonction $f_{1/2}$.

1) Donner précisément le tableau de variations de f.

$f(x) = x^2/4 – (Lnx)/2 – 1/4$
Le point minimum M a pour coordonnées (1, 0).
f est décroissante de 0 à 1, passe par le minimum (1, 0), puis croît ensuite.

2) Soit a un réel strictement positif.

Calculer $I(a) = \int_a^1 f(x)dx$.

La primitive de f(x) est $x^3/12 – (xLnx)/2 + x/4$

$I(a) = 1/12 + 1/4 – a^3/12 + (aLna)/2 – a/4$
$= 1/3 – a^3/12 + (aLna)/2 – a/4$

3) Déterminer la limite de I(a) quand $a \to 0^+$.

Quand $a \to 0^+$, $I(a) \to 1/3$.

4) Soit n entier naturel, $n \geq 2$; on pose pour p entier naturel tel que $1 \leq p \leq n$:

$S(n) = [\Sigma_{p=1 à n} f(p/n)]/n$

4a) Soit p tel que $1 \leq p \leq n - 1$; on note J(p, n) l'intervalle élémentaire J(p, n) = [p/n, (p+1)/n].

Démontrer que : $f((p+1)/n) \leq n \int_{J(p,n)} f(x)dx \leq f(p/n)$

$p/n \leq x \leq (p+1)/n$

$\Rightarrow f((p+1)/n) \leq f(x) \leq f(p/n)$, pour $p \leq n - 1$, car on est dans l'intervalle où f décroît.

En intégrant entre p/n et (p+1)/n :

$\int_{J(p,n)} f((p+1)/n)dx \leq \int_{J(p,n)} f(x)dx \leq \int_{J(p,n)} f(p/n)dx \leq$

$\Rightarrow [f((p+1)/n)]/n \leq \int_{J(p,n)} f(x)dx \leq [f(p/n)dx]/n$

4b) En déduire l'encadrement :

$S(n) - f(1/n)/n \leq I(1/n) \leq S(n)$

En sommant pour p = 1 à n l'inégalité obtenue à la question 4a, on obtient :

$[\Sigma_{p=1 à n} f((p+1)/n)]/n \leq I(1/n) \leq [\Sigma_{p=1 à n} f(p/n)]/n$

$\Leftrightarrow S(n) - f(1/n)/n \leq I(1/n) \leq S(n)$

$\Leftrightarrow I(1/n) \leq S(n) \leq I(1/n) + f(1/n)/n$

4c) En déduire la limite de S(n) quand $n \to +\infty$.

Quand $n \to +\infty$, $I(1/n) \to 1/3$, $f(1/n)/n$ tend vers 0 $\Rightarrow S(n) \to 1/3$.

Problème 4 :

C désigne le corps des nombres complexes.

Soit f la fonction de C dans C définie, pour $z \neq 2i$, par :

$f(z) = (z - 1)/(z - 2i)$

M, A et B sont les points d'affixes respectives z, 1, 2i.

1) Donner les formes cartésienne et trigonométrique de f(i).

$f(i) = (i - 1)/(- i) = - 1 - i$
$f(i) = 2^{1/2} (\cos(-3\pi/4) + i.\sin(-3\pi/4))$

2) Résoudre l'équation f(z) = 2i

$f(z) = (z - 1)/(z - 2i) = 2i \Leftrightarrow z - 1 = 2i(z - 2i) \Leftrightarrow z - 1 = 2iz + 4 \Leftrightarrow z(1 - 2i) = 5$
$\Leftrightarrow z = 5/(1 - 2i) = 1 + 2i$.

3) Déterminer l'ensemble D des points M tels que $|f(z)| = 2$.

$|f(z)| = 2 \Leftrightarrow |z - 1| = 2.|z - 2i| \Leftrightarrow |x + iy - 1| = 2.|x + iy - 2i|$
$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 4(x^2 + (y - 2)^2)$

$\Leftrightarrow (x + 1/3)^2 + (y - 8/3)^2 = 20/9$

D est le cercle de centre (- 1/3, 8/3) et de rayon $R = 2.5^{1/2}/3$.

Problème 5 :

B est la base canonique de l'espace vectoriel C^4, C étant l'ensemble des nombres complexes. M est l'ensemble des matrices carrées d'ordre 4, à coefficients complexes.
Id est l'application identité de C^4 dans C^4, I est sa matrice identité associée.
0 est le symbole de la composition des applications.

Soit g l'application de C^4 dans C^4 dont la matrice associée est J :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de g. La matrice J est-elle diagonalisable ?

L'équation conduisant aux valeurs propres est $\lambda^4 - 1 = 0$, soit 4 solutions distinctes :
$\lambda = 1$, $\lambda = -1$, $\lambda = i$, $\lambda = -i$.
La forme générique des vecteurs propres associés à la v.p. λ est donc $(x, \lambda x, \lambda^2 x, \lambda^3 x)$.
Chaque sous-espace propre est de dimension 1, la somme de dimensions vaut 4, la matrice J est diagonalisable.

2) A tout quadruplet (a, b, c, d) de C^4, on associe la matrice A suivante :

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$$

On note φ l'application dont A est la matrice relativement à la base B.

Montrer que φ est une combinaison linéaire de Id, g, g^2 (= g o g), g^3 (= g o g o g).

La matrice associée à g^2 est J^2 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De même, la matrice associée à g^3 est J^3 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On trouve aisément que $A = aI + bJ + cJ^2 + d\,J^3$, ou encore :
$\varphi = a.Id + b.g + c.g^2 + d.g^3$.

AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE L'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Exercice 1

1) Pas de corrigé

2) Le mode d'une distribution statistique est la valeur de la variable pour laquelle l'effectif est le plus élevé. La classe modale est ici la classe 400 euros - 500 euros.

La médiane Me de la distribution statistique est la valeur de la variable qui partage l'effectif total de la distribution en deux parties égales, telle que la moitié des observations soient inférieures ou égales à Me. La classe médiane est ici la classe 500 euros - 600 euros. On effectue une interpolation linéaire pour obtenir une approximation de cette valeur et on trouve 533,3 euros.

On constate que la mode et la médiane sont assez éloignés, ceci se justifie par la répartition des effectifs. En effet, on observe qu'il y a deux classes contenant des effectifs importants : la classe 400 euros - 500 euros, et la classe 600 euros - 700 euros. La visualisation de l'histogramme montre bien que la distribution est très asymétrique.

3) La moyenne arithmétique de la distribution est de 561,7 euros. On constate que la moyenne et la médiane ne sont pas proches. La médiane est inférieure à la moyenne, ceci étant dû au fait qu'un certain nombre d'étudiants ont des dépenses élevées (forte dispersion vers une extrémité de la variable).

4) L'écart-type de la variable est égal à 136,4 euros.

5) Le cumul des dépenses est de 84.250 euros. La médiale se trouve donc dans la classe 600 euros- 700 euros. En effectuant une interpolation linéaire, on obtient une estimation de la médiale à 613,0 euros. Cela signifie que les 5 étudiants de la classe [800,1000[+ les 20 étudiants de la classe [700,800[+ 87% des étudiants de la classe [600,700[, soit 60 étudiants effectuent la moitié des dépenses totales. 40% des étudiants occasionnent 50% des dépenses. Ce qui démontre une certaine concentration.

Le calcul de la valeur C demandée, indicateur de concentration, vaut $\frac{613{,}0 - 533{,}3}{1000 - 300} = 0{,}1138$.

Exercice 2

1) La distribution marginale de la variable « mois » est la suivante :

Mois 1	Mois 2	Mois 3	Total
370	370	317	1057

La distribution marginale de la variable « activités » est la suivante :

Sortie au cinéma	Sortie au bowling	Sortie au restaurant	Sortie en discothèque	Total
375	105	279	298	1057

2)

	Mois 1	Mois 2	Mois 3	Total
Sortie au cinéma	370*375/1057 =131,3	370*375/1057 =131,3	317*375/1057 =112,4	375
Sortie au bowling	370*105/1057 =36,7	370*105/1057 =36,7	317*105/1057 =31,6	105
Sortie au restaurant	370*279/1057 =97,7	370*279/1057 =97,7	317*279/1057 =83,6	279
Sortie en discothèque	370*298/1057 =104,3	370*298/1057 =104,3	317*298/1057 =89.4	298
Total	370	370	317	1057

Commentaire : Au vu du tableau précédent, il semble qu'il n'y ait pas indépendance entre la variable « mois » et la variable « activités ». En effet, il y a autant de sorties au cours des 2 premiers mois. Or, les sorties au cours du premier mois s'effectuent essentiellement au cinéma alors qu'au cours du deuxième mois, ce sont les sorties en discothèque qui arrivent largement en tête.

Exercice 3

On a ln y = t x ln k + ln y_0. On se ramène donc à un modèle linéaire avec les variables t et z = ln y, avec z = at + b.

On sait que a est égal au rapport entre Cov(z,t) et V(t). On trouve a=0,0098, d'où k=1,0099.
De même, on sait que b=moy(z)-a x moy(t), d'où b=3,642. On trouve alors y_0=38,17.
Pour t=8, l'estimation du chiffre d'affaires est de 41,29 milliers d'euros.

Exercice 4

Pas de corrigé-type mais on peut remarquer que :

- l'indice des prix a augmenté de 14,9% dans l'ensemble des pays de l'Union Européenne entre janvier 2000 et juillet 2006 ;
- l'indice des prix a augmenté plus vite en Hongrie (+44,3%) ;
- à l'inverse, la Suède et l'Allemagne ont connu des inflations modérées (respectivement +11,9% et +11,5%) ;
- les pays de la zone euro ont eu une inflation de 15,6%, assez proche du résultat obtenu pour l'ensemble des pays de l'Union Européenne ;
- l'Espagne et la Grèce ont une évolution semblable ;
- …..