

AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 1^{ère} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Problème n° 1

1. $u_1 = 1/4 = 0,25$; $u_2 = 7/16 = 0,44$; $u_3 = 37/64 = 0,59$
 $v_1 = 7/4 = 1,75$; $v_2 = 25/16 = 1,56$; $v_3 = 91/64 = 1,42$

2. $u_{n+1} - u_n = (1 - u_n)/4$

Récurrence : $u_0 < 1$; supposons $u_n < 1$; alors $u_{n+1} < 1$

D'où $u_{n+1} - u_n > 0$.

La suite (u_n) est croissante.

De même, $v_{n+1} - v_n = (1 - v_n)/4$

Récurrence : $v_0 > 1$; supposons $v_n > 1$; alors $v_{n+1} > 1$

D'où $v_{n+1} - v_n < 0$.

La suite (v_n) est décroissante.

$v_{n+1} - u_{n+1} = 3(v_n - u_n)/4$

Par récurrence : $v_0 > u_0$; supposons $v_n > u_n \Rightarrow v_{n+1} > u_{n+1}$

3. $s_{n+1} = (3s_n + 2)/4$

$s_0 = s_1 = s_2 = 2$

On démontre facilement par récurrence que la suite (s_n) est constante, égale à 2.

4. $t_{n+1} = 3t_n/4$

Suite géométrique de raison $3/4$ et de premier terme $t_1 = 2$

D'où : $t_n = 2 \cdot (3/4)^n$

5. On a donc :

$u_n + v_n = 2$

$v_n - u_n = 2 \cdot (3/4)^n$

D'où : $v_n = 1 + (3/4)^n$ et $u_n = 1 - (3/4)^n$

6. Les deux suites (u_n) et (v_n) convergent vers 1

Problème n° 2

Partie I

1. $f_n'(x)$ est de la forme $v(x)/x^3$, avec $v(x) = n - 2 - 2n \cdot \ln x$
 $v(x) = 0 \Leftrightarrow x = \exp((n-2)/2n)$

On pose $u(n) = e^{(n-2)/2n}$

Si $x < u(n)$, $f_n'(x) > 0$

Si $x > u(n)$, $f_n'(x) < 0$

Si $x = u(n)$, $f_n'(x) = 0$

La fonction f_n est donc croissante de 0 à $u(n)$ et décroissante ensuite.

2. $f_n(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + n \cdot \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1/n$

D'où :

$a(n) = e^{-1/n} = 1/e^{1/n} < 1$

$a(n)$ est une suite positive, $a(n+1)/a(n) = e^{1/n(n+1)} > 1$

$a(n)$ est croissante, majorée par 1.

Quand $n \rightarrow +\infty$, $\lim e^{1/n} = 1$ et donc $\lim a(n) = 1$

3. Quand $x \rightarrow 0^+$, $f_n(x)$ tend vers $-\infty$ ($x = 0$ asymptote verticale)

Quand $n \rightarrow +\infty$, $f_n(x)$ tend vers 0 ($y = 0$ asymptote horizontale).

Le max $M(n)$ de f_n est atteint pour $x = u(n)$: $M(n) = f_n(u(n))$.

$M(n) = n/(2 e^{(n-2)/n}) = ne^{2/n}/2e$

	0	$u(n)$	$+\infty$
f_n'		0	-
f_n	$-\infty$	$\uparrow$ $M(n)$	$\downarrow$ 0

Par ailleurs, on remarque que $f_n(1) = 1$ pour tout n ; la famille des courbes représentant f_n passe donc par un point fixe (1, 1).

4. $n = 2$, $u(2) = 1$; $M(2) = 1$; $a(2) = 0,61$

$n = 3$, $u(3) = 1,18$; $M(3) = 1,07$; $a(3) = 0,72$

5. $D_n(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x) = \ln x/x^2$, indépendante de n .

On a donc la relation de récurrence $f_{n+1}(x) = f_n(x) + \ln x/x^2$.

On construit donc point par point la courbe représentant $f_{n+1}(x)$ en ajoutant à $f_n(x)$ la quantité $\ln x/x^2$.

Partie II

6. En intégrant par parties avec $u = \ln x$, $du = 1/x$, $dv = dx/x^2$, $v = -1/x$:

$$I = - (1 + \ln x)/x$$

L'aire $A(n)$ est donnée par l'intégrale :

$$A(n) = \int_1^e D_n(x) dx = \int_1^e g(x) dx$$

$$A(n) = (1 + \ln 1)/1 - (1 + \ln e)/e = (e - 2)/e = 0,26$$

$$7. B(n) = \int_{[1,e]} f_n(x) dx = \int_{[1,e]} 1/x^2 dx + n \int_{[1,e]} \ln x/x^2 dx = [-1/x]_{[1,e]} - n [(1 + \ln x)/x]_{[1,e]}$$

$$B(n) = 1 - 1/e + n(e - 2)/e = [(e - 1) + n(e - 2)]/e \approx 0,63 + 0,26n$$

8. C'est une suite arithmétique : $B(n+1) - B(n) = (e - 2)/e$

On sait que $B(n) = [(e - 1) + n(e - 2)]/e$

$$\lim B(n) = +\infty$$

Partie III

9. On suppose maintenant $n \geq 3$.

$$u(n) = e^{(n-2)/2n} ; u(n) > 1 ?$$

$$u(n) > 1 \Leftrightarrow \ln u(n) > 0 \Leftrightarrow (n - 2)/2n > 0, \text{ ce qui est vrai puisque } n \geq 3.$$

Remarque : $u(n) = e^{1/2} \cdot e^{-1/n} = e^{1/2} \cdot a(n)$ où $a(n)$ a été introduit à la question 2. On en déduit que quand $n \rightarrow +\infty$, $u(n)$ tend vers $e^{1/2}$.

$$\text{Soit } M(n) = f_n(u(n)) = n/(2 e^{(n-2)/n}) = ne^{2/n}/2e$$

Considérons la fonction $h(x) = xe^{2/x}/2e$ pour $x \geq 3$.

$$h'(x) = (x - 2)e^{2/x}/2ex > 0 \text{ pour } x \geq 2.$$

$h(x)$ est donc strictement croissante ; $h(2) = M(2) = 1$

D'où $M(n) > 1$.

10. On a vu à la question 3 que f_n était croissante de $-\infty$ à $M(n)$ sur l'intervalle $]0, u(n)]$, telle que $f_n(1) = 1$, puis décroissante de $M(n)$ à 0 sur $[u(n), +\infty[$.

Comme $f_n(1) = 1$, $f_n(x) > 1$ sur le sous-intervalle $]1, u(n)[$.

L'équation E n'admet donc pas de solution sur $]1, u(n)[$.

11. f_n étant strictement décroissante de $M(n)$ à 0 sur $[u(n), +\infty[$, avec $u(n) > 1$ et $M(n) > 1$ (question 9).

On en déduit que l'équation (E) $f_n(x) = 1$ admet une solution et une seule sur l'intervalle $D = [u(n), +\infty[$.

12. Soit $\alpha(n)$ la solution de (E).

$$f_n(n^{1/2}) = (2 + n \cdot \ln n)/2n = 1/n + (\ln n)/2$$

$$\text{Or pour } n \geq e^2, \ln n \geq 2, \text{ donc } f_n(n^{1/2}) \geq 1 + 1/n > 1$$

Comme $f_n(\alpha(n)) = 1$ par définition, on en déduit que $f_n(n^{1/2}) \geq f_n(\alpha(n))$; f_n étant décroissante sur $[u(n), +\infty[$, on a bien $\alpha(n) \geq n^{1/2}$: cette inégalité reposant sur $n \geq e^2$ voisin de 7,4, et n étant entier, $n \geq 8$.

Comme $\alpha(n) \geq n^{1/2}$, on a : $\lim \alpha(n) = +\infty$.

AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 2^{ème} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Problème 1

1. Plaçons-nous dans le plan complexe : l'affixe de M est $z(M) = \rho e^{i\theta}$

Son image par la rotation a pour affixe $\rho e^{i(\theta+\pi/3)}$

D'où :

$$X = x_M/2 - y_M(3)^{1/2}/2$$

$$Y = y_M/2 + x_M(3)^{1/2}/2$$

2. Considérons le point I(0, -1) ; son image par R a pour coordonnées $(3)^{1/2}/2, -1/2$.

La droite D' a pour équation :

$$(Y + 1/2)/(X - (3)^{1/2}/2) = (3)^{1/2}$$

$$Y = (3)^{1/2} X - 2$$

Le point A, intersection de D' et Δ , a pour coordonnées : $(X_A = 4/(3)^{1/2}, Y_A = 2)$

3. En procédant comme pour la question 1, le point B image de A par rotation de centre O et d'angle $-\pi/3$ a pour coordonnées :

$$X_B = 5/(3)^{1/2}, Y_B = -1$$

Le point B appartient donc à la droite D.

4. On montre facilement $OA^2 = OB^2 = AB^2 = 28/3$

Le triangle OAB est équilatéral.

Sa surface est $OA \cdot OB \cdot \sin(\pi/3) = 14/(3)^{1/2}$

Problème 2

$$1. J(1) = [x \ln x - x]_1^e$$

$$J(1) = 1$$

2. Faisons une intégration par parties.

On pose $u = (\ln x)^n$, $du = n \cdot (\ln x)^{n-1}/x$, $dv = dx$, $v = x$

$$J(n) = [x(\ln x)^n]_1^e - n J(n-1) = e - n.J(n-1)$$

On a bien $J(n+1) = e - (n+1).J(n)$, soit $J(n+1) = a + bJ(n)$ avec $a = e$ et $b = n+1$.

$$J(2) = e - 2$$

$$J(3) = e - 3J(2) = 6 - 2e$$

$$J(4) = e - 4J(3) = 9e - 24$$

3. Sur $[1, e]$, $\ln x \geq 0 \Rightarrow J(n) \geq 0$

De même, $\ln x \leq 1$; donc $(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} \geq 0$, et $J(n) \geq J(n+1)$

La suite $J(n)$ est décroissante.

Décroissante et minorée, elle admet donc une limite.

Comme, pour tout n , $J(n) \geq 0$, $J(n+1) = e - (n+1).J(n) \geq 0 \Rightarrow (n+1).J(n) \leq e$

$$J(n) \leq e/(n+1)$$

$$\Rightarrow 0 \leq J(n) \leq e/(n+1) \text{ et donc } \lim J(n) = 0$$

On a : $J(n+1) + nJ(n) = e$

Quand $n \rightarrow +\infty$, $J(n)$ et $J(n+1) \rightarrow 0$ et donc $nJ(n) \rightarrow e$.

Problème 3

1.a Il y a $C_n^2 = n(n-1)/2$ couples possibles ; un seul est composé des deux tickets gagnants.

Le nombre de couples de tickets composés d'un gagnant et d'un seul est $C_2^1 C_{n-2}^1$,

soit $2(n-2)$.

Ceci permet d'écrire la loi de probabilité de X .

$$P(X = 2) = 2/n(n-1)$$

$$P(X = 1) = 4(n-2)/n(n-1)$$

$$P(X = 0) = 1 - P(X = 1) - P(X = 2) = (n^2 - 5n + 6)/n(n-1)$$

$$1.b E(X) = 0.P(X = 0) + 1.P(X = 1) + 2.P(X = 2) = 4/n$$

$$E(X^2) = 0.P(X = 0) + 1.P(X = 1) + 4.P(X = 2) = 4/(n-1)$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = 4(n-2)^2/n^2(n-1)$$

1.c

$$P(X = 2) = 2,2 \% ; P(X = 1) = 35,6 \% ; P(X = 0) = 62,2 \%$$

$$E(X) = 0,4 ; V(X) = 0,284$$

2.a Y suit une loi binômiale $B(2, 2/n)$

$$P(Y = y) = C_2^y (2/n)^y ((n-2)/n)^{2-y} \text{ pour } y = 0, 1, 2$$

$$P(Y = 2) = 4/n^2$$

$$P(Y = 1) = 4(n-2)/n^2$$

$$P(Y = 0) = (n-2)^2/n^2$$

$$2.b E(Y) = 4/n ; V(Y) = 4(n-2)/n^2$$

$$2.c P(Y = 2) = 4 \% ; P(Y = 1) = 32 \% ; P(Y = 0) = 64 \%$$

$$E(Y) = 0,4 ; V(Y) = 0,32$$

$$3. a \text{ On a : } a(n) - b(n) = 4(n-2)/n(n-1) - 4(n-2)/n^2 = 4(n-2) / n^2(n-1)$$

$$3.b \text{ Pour } n = 50, a(n) - b(n) = 0,001567$$

$$\text{Pour } n = 64, a(n) - b(n) = 0,000961$$

$$\text{Pour } n = 63, a(n) - b(n) = 0,009915$$

$$\text{Pour } n = 62, a(n) - b(n) = 0,0010235$$

$$n^* = 63$$

4. La probabilité de gagner est $P(G) = P(\text{avoir au moins un ticket gagnant})$

$$P_1(G) = P(X = 1) + P(X = 2) = (4n-6)/n(n-1)$$

$$P_2(G) = P(Y = 1) + P(Y = 2) = 4(n-1)/n^2$$

$$P_2(G) - P_1(G) = (4 - 2n)/n^2(n-1) < 0$$

La meilleure stratégie est la 1.

AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE L'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Question 1

Le coefficient de corrélation entre les deux variables X et Y est égal à 0,884

Question 2

Y estimé = 15,11 X – 29914,54

Question 3

Y estimé 2003 = 350,8

Y estimé 2004 = 365,9

Question 4

A partir de la droite trouvée à la question 2, on peut calculer des valeurs estimées de Y pour les années étudiées. Les résultats vous sont donnés dans le tableau ci-dessous. Compléter ce tableau :

X	Y	Y estimé	E = Y – Y estimé
1998	271,0	275,2	-4,2
1999	281,5	290,4	-8,9
2000	323,2	305,5	17,7
2001	328,6	320,6	8,0
2002	323,0	335,7	-12,7
Moyenne	305,5	305,5	0
Variance	583,9	456,6	127,3

Voir la démonstration dans un livre de cours : la variance de Y est la somme de la variance de Y estimé et de la variance de l'écart entre Y et Y estimé.

Question 5

Le coefficient de détermination est égal à 0,782

Question 6

Le coefficient de détermination entre X et Z est égal à 0,66 et celui entre X et S vaut 0,23. Il est évident que le modèle linéaire n'est pas bien adapté pour la recherche des valeurs de S manquantes. D'ailleurs, un graphique du nuage du point entre X et S montre qu'une droite a peu de chances de relier les différents points. Cela montre les limites de l'exercice : la différence de deux valeurs « assez bien » estimées est loin d'être correctement estimée.

Question 7

Il n'y a pas de corrigé type mais on peut remarquer :

- pour la troisième année consécutive, les échanges avec l'étranger se soldent par un déficit commercial.
- celui-ci s'élève à 256 millions d'euros en 2003. Il est en diminution par rapport à celui constaté l'année précédente
- les exportations ont représenté un montant cumulé de 3.384 millions d'euros en 2003, en baisse de 5% par rapport à 2002 et de 23% par rapport à l'année 2000 qui fut certes une année exceptionnelle en matière d'exportations
- du côté des importations, la région retrouve son niveau de 1998. Les achats de la région à l'étranger sont en recul de 7% par rapport à 2002
- le secteur agroalimentaire, grâce à la bonne santé de ses exportations, contribue positivement au solde commercial (272 millions d'euros)
- l'industrie automobile reste cependant de loin le plus gros secteur à l'exportation en 2003 avec un chiffre d'affaires de 739 millions d'euros
- l'Allemagne reste le premier partenaire de la région. L'Espagne confirme sa place de second client
- dans la liste des 15 premiers clients de la région, il faut remarquer la présence de l'Iran à la 13^{ème} place avec un volume de 41 millions d'euros et de la Tunisie
- ...