

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

PROBLEME n° 1

1) La fonction $f(t)\cos t$ (resp. $f(t)\sin t$) est continue sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions continues.

La fonction u est la primitive de cette fonction s'annulant en 0.

u est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel, $u'(x) = f(x)\cos x$.

De même $v'(x) = f(x)\sin x$.

2) En développant $\sin(x - t) = \sin x \cos t - \cos x \sin t$, et en utilisant la linéarité de l'intégrale, on a :

$$T_f(x) = u(x)\sin x - v(x)\cos x$$

T_f est donc dérivable (différence de produits de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$).

Et on a, pour tout x réel :

$$T_f'(x) = u(x)\cos x + u'(x)\sin x - v'(x)\cos x + v(x)\sin x$$

En remplaçant u' et v' par leurs expressions (question 1), on obtient :

$$T_f'(x) = u(x)\cos x + v(x)\sin x$$

On montre aisément que T_f' est dérivable également, et que T_f'' est continue :

$$T_f''(x) = v(x)\cos x - u(x)\sin x + f(x)$$

T_f appartient donc à F .

T est une application de E dans F .

La linéarité $T_{f+g} = T_f + T_g$ résulte de la linéarité de l'intégrale.

3) Puisque, d'après les questions 1 et 2, $T_f(x) = u(x)\sin x - v(x)\cos x$ et $T_f''(x) = v(x)\cos x - u(x)\sin x + f(x)$, on a bien $T_f + T_f'' = f$

Soit $f \in N(T) : T_f = 0$ et donc $T_f'' = 0$ d'où $f = T_f + T_f'' = 0$
Donc le noyau de T se réduit à l'application nulle de R dans R .

4) Soit $g \in \text{Im}(T)$: cela signifie qu'il existe (au moins) une fonction f de E telle que $g = T_f$. Donc $g \in F$ et comme $g(x) = \int_{[0,x]} f(t)\sin(x-t) dt$, on a de façon évidente $g(0) = 0$ et $g'(0) = 0$
 $\Rightarrow g \in G$

D'où : $\text{Im}(T) \subset G$

Calcul de $T_{g+g''}$.

$$T_{g+g''}(x) = \int_{[0,x]} g(t)\sin(x-t) dt + \int_{[0,x]} g''(t)\sin(x-t) dt$$

Intégrons par parties :

Posons, dans la première intégrale, $u'(t) = \sin(x-t)$ et $v(t) = g(t) \Rightarrow u(t) = \cos(x-t)$ et $v'(t) = g'(t)$.

Dans la deuxième intégrale, on pose $u'(t) = g''(t)$ et $v(t) = \sin(x-t) \Rightarrow u(t) = g'(t)$ et $v'(t) = -\cos(x-t)$.

Remarque : aucune confusion entre ces notations u et v classiques en intégration par parties et les fonctions u et v de la question 1.

On obtient :

$$\begin{aligned} T_{g+g''}(x) &= [g(t)\cos(x-t)]_{[0,x]} - \int_{[0,x]} g'(t)\cos(x-t) dt + [g'(t)\sin(x-t)]_{[0,x]} \\ &+ \int_{[0,x]} g'(t)\cos(x-t) dt \\ &= g(x) - g(0)\cos x - g'(0)\sin x = g(x) \text{ car } g(0) = g'(0) = 0. \end{aligned}$$

On déduit que si g appartient à G , alors $T_{g+g''} = g$, donc $g \in \text{Im}(T) : G \subset \text{Im}(T)$.

On en conclut $\text{Im}(T) = G$.

5) D'après les résultats précédents, T est une application linéaire de E dans G , injective ($N(T) = 0$) et telle que $\text{Im}(T) = G$ (surjective). T est donc une bijection, c'est-à-dire un isomorphisme de E dans G , elle admet donc une application réciproque, notée T^{-1} .

On a, pour tout g de G , $T_{g+g''} = g$; en composant par l'inverse, on a $T_g^{-1} = g + g''$.

6) Effectuons le calcul intégral :

$$T_f(x) = \int_0^x \sin t \sin(x-t) dt = \int_0^x [\cos(2t-x) - \cos x]/2 dt = (\sin x - x \cos x)/2$$

Posons $h(x) = (\sin x - x \cos x)/2$, $h \in F$, et donc $s = T_h^{-1}$ et $h + h'' = s$

PROBLEME n° 2

1) f est continue sur l'intervalle $U = [0, +\infty[$; elle admet donc une primitive F sur U , et on peut ainsi écrire $h(x) = [F(x) - F(0)]/x$.

F est dérivable et donc continue sur $]0, +\infty[$; comme rapport de deux fonctions continues sur $]0, +\infty[$, h est donc continue sur $]0, +\infty[$.

Quand $x \rightarrow 0$, puisque F est dérivable en 0, $[F(x) - F(0)]/x$ tend vers $F'(0) = f(0) = h(0)$; d'où $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = h(0)$.

2) On a établi dans la question 1 que h était continue sur $U = [0, +\infty[$, c'est-à-dire que $h \in E$. H est donc une application de E dans E .

La linéarité de H est évidente : a et b étant deux réels, f et u deux fonctions de E :

- Pour $x > 0$, $H(af + bu) = aH(f) + bH(u)$, d'après la linéarité de l'intégrale
- Ne pas oublier le cas $x = 0$: $H(af + bu)(0) = (af + bu)(0) = af(0) + bu(0) = aH(f)(0) + bH(u)(0)$

3) F est dérivable sur $]0, +\infty[$ donc h est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme rapport de deux fonctions dérivables.

4) Supposons que 0 soit valeur propre de H : il existe donc une fonction f non nulle de E telle que $H(f) = 0$.

On a donc $f(0) = 0$ et, pour tout $x > 0$, $F(x) - F(0) = 0$, c'est-à-dire $F(x) = F(0) =$ constante.

F étant constante, $F'(x) = f(x) = 0 \forall x \in]0, +\infty[$.

Or f est non nulle et donc 0 ne peut être valeur propre de H .

$$5) H(f) = \alpha f = h \Rightarrow f = h / \alpha$$

D'après la question 3, h est dérivable sur $]0, +\infty[$, donc f l'est aussi.

Plaçons-nous sur $]0, +\infty[$; pour tout $x > 0$, $\varphi(x) = f(x) = h(x)/\alpha = [F(x) - F(0)]/\alpha x$, ou encore :

$$\alpha x \varphi(x) = F(x) - F(0)$$

En dérivant :

$$\alpha [x \varphi'(x) + \varphi(x)] = f(x) = \varphi(x)$$

$$\text{D'où la relation demandée : } \forall x > 0 \quad \alpha x \varphi'(x) = (1 - \alpha) \varphi(x)$$

6) Soit $x > 0$.

On a :

$$g'(x) = (1 - 1/\alpha)x^{-1/\alpha}\varphi(x) + x^{(\alpha-1)/\alpha}\varphi'(x).$$

$$g'(x) = x^{1/\alpha}[\alpha x \varphi'(x) + (\alpha - 1) \varphi(x)]/\alpha = 0 \text{ d'après la relation trouvée à la question 5.}$$

La fonction g est donc constante sur $]0, +\infty[$.

7) On déduit de ce qui précède que si φ est la restriction à $]0, +\infty[$ d'une fonction f non nulle et continue telle que $H(f) = \alpha f$, avec $\alpha \neq 0$, il existe une constante réelle k telle que $g(x) = k$, ou encore :

$$\varphi(x) = k x^{(1-\alpha)/\alpha}$$

Comme f est continue en 0, f admet une limite finie à droite en 0 égale à f(0) ; une condition nécessaire pour que ceci soit réalisé est que $(1 - \alpha)/\alpha \geq 0$, c'est-à-dire :

$$0 < \alpha \leq 1$$

$$\text{Alors : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0 \text{ si } 0 < \alpha < 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = k \text{ si } \alpha = 1.$$

8) Il résulte de tout ce qui précède que l'ensemble des valeurs propres α de H est l'intervalle $]0, 1]$.

$$\text{Si } \alpha \in]0, 1[, f(x) = k x^{(1-\alpha)/\alpha} \text{ pour } x > 0 \text{ et } f(0) = 0$$

$$\text{Si } \alpha = 1, f(x) = k$$

Remarque : en revenant à la définition initiale, on vérifie facilement par le calcul que les fonctions f précédentes sont bien les vecteurs propres associés aux valeurs propres $\alpha \in]0, 1[$ et $\alpha = 1$

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

On définit la suite récurrente (u_n) , $n \geq 1$, par :

$$u_1 = 0$$

$$\forall n \geq 2 \quad (n+1)^2 u_n = (n-1) u_{n-1} - n$$

1) Calculer u_2 et u_3 .

$$\text{Pour } n = 2, \quad 9 u_2 = u_1 - 2 \Rightarrow u_2 = -2/9$$

$$u_3 = -31/144$$

2) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \in [-1, 0]$.

Raisonnons par récurrence.

La propriété est vraie au rang 1. Supposons-la vraie au rang n .

$$\bullet \quad u_{n+1} = [n u_n - (n+1)] / (n+2)^2$$

$$u_n \leq 0 \Rightarrow n u_n - (n+1) \leq 0 \Rightarrow u_{n+1} \leq 0$$

- $u_n - (-1) = [nu_n - (n+1) + (n+2)^2]/(n+2)^2$
 $= [n^2 + n(u_n + 3) + 3]/(n+2)^2$

$$u_n \geq -1 \Rightarrow u_n + 3 \geq 2 \Rightarrow n^2 + n(u_n + 3) + 3 \geq 0 \Rightarrow u_{n+1} \geq -1$$

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

3) Montrer que la suite (u_n) admet une limite que l'on déterminera.

$$u_n = [(n-1)u_{n-1} - n]/(n+1)^2 = A(n)u_{n-1} + B(n)$$

$$\text{avec } A(n) = (n-1)/(n+1)^2 \text{ et } B(n) = -n/(n+1)^2$$

$A(n)$ et $B(n)$ tendent vers 0 quand n tend vers l'infini

$$\text{Comme } u_{n-1} \in [-1, 0], -A(n) \leq A(n)u_{n-1} \leq 0, \text{ et donc } A(n)u_{n-1} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

$$\text{Donc } u_n \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

4) Montrer que, $\forall n \geq 2, u_n \leq -n/(n+1)^2$; établir que la suite (u_n) est croissante à partir du rang $n = 2$.

En reprenant l'expression $u_n = A(n)u_{n-1} + B(n)$, on a $A(n)u_{n-1} \leq 0$ et donc :

$$u_n - B(n) = A(n)u_{n-1} \leq 0 \Rightarrow u_n - B(n) \leq 0$$

$$u_n \leq -n/(n+1)^2$$

- $\forall n \geq 2, u_{n+1} - u_n = [nu_n - (n+1)]/(n+2)^2 - u_n$
 $= -[u_n(n^2 + 3n + 4) + (n+1)]/(n+2)^2$

On a :

$$n^2 + 3n + 4 \geq 0$$

$$u_n \leq -n/(n+1)^2$$

$$\Rightarrow u_n(n^2 + 3n + 4) + (n+1) \leq -n(n^2 + 3n + 4)/(n+1)^2 + (n+1) = (1-n)/(n+1)^2 < 0$$

Donc $u_{n+1} - u_n > 0$, c'est-à-dire que la suite est croissante à partir du rang 2.

Exercice n° 2

1) Démontrons le résultat par récurrence :

- La propriété est vraie pour $n = 0$: $P_0 = 1$
- Supposons-la vraie au rang n

$$f^{(n+1)}(x) = [P_n'(x) (1 + x^2) - 2x(n+1)P_n(x)] (1 + x^2)^{-(n+2)}$$

$$\text{Posons } P_{n+1}(x) = P_n'(x) (1 + x^2) - 2x(n+1)P_n(x)$$

Soit P_n de degré n , de premier terme $a_n x^n$; le terme de plus haut degré de P_{n+1} est donc $n a_n x^{n+1} - 2(n+1) a_n x^{n+1} = -(n+2) a_n x^{n+1} \Rightarrow \text{degré } P_{n+1} = n + 1$.

Tous les monômes de P_n ont la même parité que n : tous ceux de $x P_n(x)$ ont donc celle de $n + 1$, ceux de $P_n'(x)$ ont celle de $n - 1$, ceux de $P_n'(x) (1 + x^2)$ ont donc la parité de $n + 1$.

La propriété générale est donc vraie au rang $n + 1$.

2) Calcul de $f'(x)$:

$$f'(x) = -2x / (1 + x^2)^2$$

$$\text{Donc : } (1 + x^2)f'(x) + 2xf(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

3) Partons de la relation établie à la question 2 : $(1 + x^2)f'(x) + 2xf(x) = 0$

Dérivons-la n fois :

$$\sum_{k=0}^n C_n^k (1 + x^2)^{(k)} (f'(x))^{(n-k)} + 2 \sum_{k=0}^n C_n^k x^{(k)} (f(x))^{(n-k)} = 0$$

Or on remarque que $(1 + x^2)^{(k)} = 0$ dès que $k > 2$ et $x^{(k)} = 0$ dès que $k > 1$.

L'équation générale se simplifie grandement et devient :

$$(1 + x^2)(f'(x))^{(n)} + 2nx(f'(x))^{(n-1)} + n(n-1)(f'(x))^{(n-2)} + 2x(f(x))^{(n)} + 2n(f(x))^{(n-1)} = 0$$

d'où :

$$(1 + x^2)f^{(n+1)}(x) + 2nxf^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) + 2xf^{(n)}(x) + 2nf^{(n-1)}(x) = 0$$

$$\text{et : } (1 + x^2)f^{(n+1)}(x) + 2(n+1)xf^{(n)}(x) + n(n+1)f^{(n-1)}(x) = 0$$

En multipliant le tout par $(1 + x^2)^{n+1}$, on a :

$$P_{n+1}(x) + 2(n+1)xP_n(x) + n(n+1)(1 + x^2)P_{n-1}(x) = 0$$

4) D'après la relation définissant P_{n+1} , $P_{n+1}(x) = P_n'(x)(1 + x^2) - 2x(n+1)P_n(x)$, vue à la question 1, en remplaçant $P_{n+1}(x)$ par cette expression dans la relation de la question 3, on obtient :

$$P_n'(x) + n(n+1)P_{n-1}(x) = 0$$

5) Dérivons la relation établie à la question 4.

Il vient :

$$P_n''(x) + n(n+1)P_{n-1}'(x) = 0$$

Or, en utilisant le résultat de la question 4 au rang $n - 1$, on a :

$$P_{n-1}'(x) = -n(n-1)P_{n-2}(x), \text{ et donc } P_n''(x) = n^2(n-1)(n+1)P_{n-2}(x)$$

La quantité à étudier $A = (1 + x^2) P_n''(x) - 2nxP_n'(x) + n(n+1)P_n(x)$ peut être écrite :

$$A = n^2(n-1)(n+1)(1 + x^2)P_{n-2}(x) + 2n^2(n+1)xP_{n-1}(x) + n(n+1)P_n(x)$$

$$= n(n+1)[n(n-1)(1 + x^2)P_{n-2}(x) + 2nxP_{n-1}(x) + P_n(x)]$$

Or la quantité entre crochets n'est autre que, écrite au rang $n - 1$, celle qui est considérée dans la relation E, donc égale à 0.

Exercice n° 3

$$1) \ln(1 + x) \approx x - x^2/2 + x^3/6$$

$$2) \text{ Pour } x \neq 0, \ln f(x) = -1 + (x+2)/2x \ln(1+x) \approx -x^2/12$$

$$f(x) \approx e^{-x^2/12} \approx 1 - x^2/12$$

Donc $\ln f(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$ et donc $f(x) \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow 0$; or $1 = f(0)$ donc f est continue en 0.

Dérivée en 0 :

$$[f(x) - f(0)]/x \approx -x/12 \rightarrow 0 \text{ quand } x \rightarrow 0$$

$$f'(0) = 0$$

3) Soit $x \neq 0$; en passant par le Ln :

$$f'(x)/f(x) = [-x^2 \ln(1+x) + (x+2)/2x(1+x)]$$

$$f'(x) = f(x) x^2 [-\ln(1+x) + \frac{1}{2} (1+x - (1+x)^{-1})]$$

D'où :

$$f'(x) = x^{-2} \varphi(x) f(x), x \neq 0$$

f est continue sur $] -1, +\infty[$, φ est continue sur $] -1, 0[$ et $]0, +\infty[$, et l'application $x \rightarrow x^2$ est continue sur $] -1, +\infty[$, nulle en 0.

Donc f' est continue sur $] -1, 0[$ et $]0, +\infty[$.

Au voisinage de $x = 0$:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{2} [1+x - (1+x)^{-1}] - \ln(1+x) \approx \frac{1}{2} [1+x - (1-x+x^2-x^3)] - (x - x^2/2 + x^3/6) \\ &= -x^3/6 \end{aligned}$$

$$f'(x) \approx (1 - x^2/12) (-x^3/6)/x^2$$

Donc $f'(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$, donc f' est continue en 0 (puisque l'on a démontré en question 2 que $f'(0) = 0$).

4) On établit facilement que $\varphi'(x) = x^2/2(1+x)^2$, donc positive.

φ est donc croissante, nulle en $x = 0$, et donc négative sur $] -1, 0[$, positive pour $x > 0$.

5) Comme f' a le même signe que φ , f' est négative sur $] -1, 0[$, nulle en 0, positive pour $x > 0$; f est donc décroissante sur $] -1, 0[$, croissante pour $x > 0$, et passe par un minimum en $x = 0$ tel que $f(0) = 1$.

On en déduit que, $\forall x > -1$, $f(x) \geq 1$.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

CORRIGE DE L'EPREUVE D'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Exercice n° 1

- 1) Soit X la variable aléatoire : nombre de postes informatiques défectueux parmi les 3 retenus

$$P(X=0) = \frac{C_{18}^3 C_2^0}{C_{20}^3} = 0,716$$

$$P(X=1) = \frac{C_{18}^2 C_2^1}{C_{20}^3} = 0,268$$

$$P(X=2) = \frac{C_{18}^1 C_2^2}{C_{20}^3} = 0,016$$

- 2) Si m est le nombre de pièces défectueuses dans un lot de 20 pièces, on a :

$$P(X=0) = \frac{C_m^0 C_{20-m}^3}{C_{20}^3} = \frac{(20-m)(19-m)(18-m)}{20 \times 19 \times 18}$$

m=0	P=100%	m=4	P=49,1%	m=8	P=19,3%	m=12	P=4,9%	m=16	P=0,4%
m=1	P=85%	m=5	P=39,9%	m=9	P=14,5%	m=13	P=3,1%	m=17	P=0,1%
m=2	P=71,6%	m=6	P=31,9%	m=10	P=10,5%	m=14	P=1,8%	m=18	P=0%
m=3	P=59,6%	m=7	P=25,1%	m=11	P=7,4%	m=15	P=0,9%	m>18	P=0%

3) Si on teste une machine supplémentaire (soit 4), alors $P(X=0)$ est égal à 0,632 (au lieu de 0,716 pour 3 machines testées). L'espérance de perte financière moyenne liée à l'acceptation du lot des 20 machines à tort diminue alors de 1432 euros à 1264 euros, soit une diminution de 168 euros. Comme le coût d'un test est de 200 euros, le conseil est de ne pas envisager l'augmentation de l'échantillon.

Exercice n° 2

Calcul des ventes des cigarettes LAFUME
aux conditions économiques du 1^{er} janvier 1996

(en millions d'euros)

1 ^{er} janvier	Taux d'inflation annuel	Indice des prix (base 100 au 1/1/96)	Ventes en millions d'euros courants	Ventes en millions d'euros constants
1996	-	100	1000	1000
1997	5%	105	1197	1140
1998	8%	113,4	1508	1330
1999	3%	116,8	1864	1596
2000	6%	123,8	2538	2050

Exercice n° 3

Pas de corrigé type.