

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2002

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

CORRECTION DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Preliminaires :

$$a = (z + \bar{z})/2$$

$$b = (z - \bar{z})/2i = i(\bar{z} - z)/2$$

$$\cos\theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2$$

$$\sin\theta = (e^{i\theta} - e^{-i\theta})/2i = i(e^{-i\theta} - e^{i\theta})/2$$

Première partie :

1) $f_n(0) = n$ et $g_n(0) = 0$

2) On a :

$$S(x) = f_n(x) + i g_n(x) = \sum_{k=1}^n e^{i2kx}$$

En posant $e^{i2x} = a$, $S(x) = a + a^2 + \dots + a^n = a(1 - a^n)/(1 - a)$

$$S(x) = e^{i2x} (1 - e^{i2xn})/(1 - e^{i2x})$$

$$= e^{i(n+1)x} (e^{inx} - e^{-inx})/(e^{ix} - e^{-ix}) = [\cos(n+1)x + i \sin(n+1)x] \sin nx / \sin x$$

$f_n(x)$ est la partie réelle de $S(x)$, égale à $\cos(n+1)x \cdot \sin nx / \sin x$

D'après les formules élémentaires de trigonométrie,
 $\cos a \sin b = [\sin(a + b) - \sin(a - b)]/2$

d'où le résultat :

$$f_n(x) = [\sin (2n+1)x - \sin x] / 2 \sin x$$

De même, $g_n(x)$ est la partie imaginaire de $S(x)$, d'où :

$$g_n(x) = \sin(n+1)x \sin nx / \sin x = [\cos x - \cos(2n + 1)x] / 2 \sin x$$

3) α et β étant deux nombres réels, on considère la fonction $h(x)$ définie sur $[0, \pi/2]$ par :

$$h(x) = (\alpha x + \beta x^2) / \sin x \quad \text{pour } 0 < x \leq \pi/2$$

$$h(0) = \alpha$$

h est le rapport de deux fonctions dérivables sur $]0, \pi/2]$, donc est dérivable sur ce même intervalle.

En outre, on sait que $\sin x$ est équivalent à x quand x tend vers 0, et donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} [h(x) - h(0)]/x = \beta$$

La fonction h est dérivable à droite en 0, $h'(0) = \beta$.

Par suite, h est dérivable sur l'intervalle fermé $[0, \pi/2]$.

Calcul de $h'(x)$ pour $x \in [0, \pi/2]$:

$$h'(0) = \beta$$

$$\text{Sur }]0, \pi/2], h'(x) = [(\alpha + 2\beta x)\sin x - (\alpha x + \beta x^2)\cos x] / \sin^2 x$$

h' est le rapport de deux fonctions continues sur $]0, \pi/2]$; elle est donc continue sur $]0, \pi/2]$.

$$\text{En outre, quand } x \text{ tend vers } 0, h'(x) \approx [(\alpha + 2\beta x)x - (\alpha x + \beta x^2)1]/x^2 = \beta = h'(0)$$

$\Rightarrow h'$ est continue sur $[0, \pi/2]$.

4) Pour tout entier n strictement positif, on définit l'intégrale :

$$H(n) = \int_{[0, \pi/2]} h(x) \sin nx \, dx$$

a – h est continue sur $[0, \pi/2]$ car elle y est dérivable ; la fonction $\sin nx$ est également continue sur $[0, \pi/2]$, et donc $h(x) \sin nx$ est continue sur $[0, \pi/2]$.
Par conséquent, l'intégrale $H(n)$ existe.

b – Intégrons par parties en posant $u(x) = h(x)$ et $v'(x) = \sin nx$
 $u'(x) = h'(x)$ et $v(x) = -\cos nx/n$

On obtient :

$$H(n) = [-h(x)\cos nx/n]_{[0, \pi/2]} + \int_{[0, \pi/2]} h'(x) \cos nx/n \, dx$$

$$\text{D'où } nH(n) = h(0) - h(\pi/2)\cos n\pi/2 + \int_{[0, \pi/2]} h'(x) \cos nx \, dx$$

En passant aux valeurs absolues et en majorant les cosinus par 1 :

$$|H(n)| \leq [|h(0)| + |h(\pi/2)| + \int_{[0, \pi/2]} |h'(x)| \, dx] / n$$

$$\text{On pose } K = |h(0)| + |h(\pi/2)| + \int_{[0, \pi/2]} |h'(x)| \, dx$$

K est bien indépendant de n et vérifie $|H(n)| \leq K/n$.

On en déduit que la limite de $H(n)$ est 0 quand n tend vers $+\infty$.

Deuxième partie :

5) On note par $J(k ; \alpha, \beta)$ l'intégrale suivante :

$$J(k ; \alpha, \beta) = \int_{[0, \pi/2]} (\alpha x + \beta x^2) \cos 2kx \, dx$$

Procédons à une première intégration par parties :

$$u'(x) = \cos 2kx$$

$$u(x) = \sin 2kx / 2k$$

$$v(x) = \alpha x + \beta x^2$$

$$v'(x) = \alpha + 2\beta x$$

$$\begin{aligned} J(k ; \alpha, \beta) &= \int_{[0, \pi/2]} (\alpha x + \beta x^2) \cos 2kx \, dx \\ &= [(\alpha x + \beta x^2) \sin 2kx / 2k]_{[0, \pi/2]} - \int_{[0, \pi/2]} (\alpha + 2\beta x) \sin 2kx / 2k \, dx \end{aligned}$$

d'où :

$$J(k ; \alpha, \beta) = - \left(\int_{[0, \pi/2]} (\alpha + 2\beta x) \sin 2kx \, dx \right) / 2k$$

Procédons à une deuxième intégration par parties :

$$u'(x) = \sin 2kx$$

$$u(x) = -\cos 2kx / 2k$$

$$v(x) = \alpha + 2\beta x$$

$$v'(x) = 2\beta$$

Il s'en suit :

$$J(k ; \alpha, \beta) = - \left(\int_{[0, \pi/2]} (\alpha + 2\beta x) \sin 2kx \, dx \right) / 2k$$

$$= - \left[-(\alpha + 2\beta x) \cos 2kx / 2k \right]_{[0, \pi/2]} + \int_{[0, \pi/2]} 2\beta \cos 2kx / 2k \, dx / 2k$$

$$= [(-1)^k(\alpha + \beta\pi) - \alpha] / 4k^2$$

6) On choisit α et β pour que $(\alpha + \beta\pi) = 0$ et $-\alpha = 1$, ce qui conduit à prendre $\alpha^* = -1$ et $\beta^* = 1/\pi$.

$$\text{On a alors : } J(k ; \alpha^*, \beta^*) = 1 / 4k^2$$

$$7) u_n = \sum_k 4 J(k ; \alpha^*, \beta^*) = 4 \sum_k \int_{[0, \pi/2]} (-x + x^2/\pi) \cos 2kx \, dx$$

$$= 4 \int_{[0, \pi/2]} (-x + x^2/\pi) \sum_k \cos 2kx \, dx$$

$$= 4 \int_{[0, \pi/2]} (-x + x^2/\pi) f_n(x) \, dx$$

8) On remplace $f_n(x)$ par l'expression établie à la question 2 de la première partie.

$$u_n = 4 \int_{[0, \pi/2]} (-x + x^2/\pi) [\sin (2n+1)x - \sin x] / 2 \sin x \, dx$$

On en déduit :

$$u_n = 2 \int_{[0, \pi/2]} (-x + x^2/\pi) [\sin (2n+1)x / \sin x] \, dx - 2 \int_{[0, \pi/2]} (-x + x^2/\pi) \, dx$$

$$u_n = 2 \int_{[0, \pi/2]} h^*(x) \sin (2n+1)x \, dx - 2 \int_{[0, \pi/2]} (-x + x^2/\pi) \, dx$$

où h^* désigne la fonction h introduite à la première partie avec les valeurs (α^*, β^*) pour (α, β) .

On a donc, compte tenu de la définition de H (question 4, première partie) :

$$u_n = 2 H(2n+1) - 2 \int_{[0, \pi/2]} (-x + x^2/\pi) dx$$

Un calcul élémentaire permet d'établir que $-2 \int_{[0, \pi/2]} (-x + x^2/\pi) dx = \pi^2/6$

9) Comme on sait (question 4, première partie) que $\lim_{n \rightarrow +\infty} H(2n+1) = 0$, il s'en suit :

$U = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ existe et est égale à $\pi^2/6$.

**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE**

ABIDJAN

AVRIL 2002

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

CORRECTION DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Problème n° 1

1) Il suffit d'étudier la fonction $f(x) = \ln(1 + x) - x$

Sa dérivée est $f'(x) = -x / (1 + x)$, est positive entre -1 et 0 , négative ensuite. La fonction f est donc croissante sur $] -1, 0]$ et décroissante pour $x \geq 0$, passant par un maximum en $x = 0$.

Or $f(0) = 0$, donc $f(x) \leq 0 \quad \forall x > -1$.

2) $\ln(1 - x^2/n)^n = n \ln(1 - x^2/n)$
 $\forall x \in [-(n)^{1/2}, (n)^{1/2}]$, $x^2/n \in [-1, 1]$

On applique le résultat de la question 1 avec $x \rightarrow -x^2/n$:

$$n \ln(1 - x^2/n) \leq -x^2$$

$$\text{D'où : } (1 - x^2/n)^n \leq e^{-x^2}$$

3) Toujours avec le résultat de la question 1, $\ln(1 + x^2/n) \leq x^2/n$

$$-n \ln(1 + x^2/n) \geq -x^2$$

$$\text{D'où : } e^{-x^2} \leq (1 + x^2/n)^{-n}$$

Problème n° 2

1) Le calcul direct permet d'établir :

$$A^2 = 4A$$

$$B^2 = 2B$$

$$AB = BA = 0$$

$$\text{Et } A^n = 4^{n-1}A, B^n = 2^{n-1}B$$

2) $S = A + B$. Par le développement du binôme, en remarquant que tous les produits de la forme $A^i B^j$, i et j entre 1 et n , sont nuls, on obtient :

$$S^n = a^n A^n + b^n B^n = 4^{n-1}a^n A + 2^{n-1}b^n B \quad \text{pour tout entier } n \text{ strictement positif.}$$

Problème n° 3

Les coordonnées (x, y, z) du vecteur propre associé à la valeur propre λ vérifient les équations :

$$(2\cos^2 t - \lambda)x + y + (1 + \cos 4t)z = 0$$

$$(1 - \lambda)y = 0$$

$$-x/2 + (2\sin^2 t - \lambda)z = 0$$

Premier cas : $\lambda = 1$

Le système devient :

$$(2\cos^2 t - 1)x + y + (1 + \cos 4t)z = 0$$

$$-x/2 + (2\sin^2 t - 1)z = 0$$

ou encore :

$$x \cos 2t + y + 2z \cos^2 2t = 0$$

$$x + 2z \cos 2t = 0$$

On en déduit :

$$y = 0 \text{ et } x = -2z \cos 2t$$

$\lambda = 1$ est valeur propre et le sous-espace propre associé est engendré par le vecteur $(-2\cos 2t, 0, 1)$, c'est-à-dire une droite (dimension 1).

Deuxième cas : $\lambda \neq 1$

Le système devient :

$$x = -2(\lambda - 2\sin^2 t)z$$

$$y = 0$$

$$z[2\cos^2 t - 2(2\cos^2 t - \lambda)(\lambda - 2\sin^2 t)] = 0$$

ou encore :

$$x = -2(\lambda - 2\sin^2 t)z$$

$$y = 0$$

$$(\lambda - 1)^2 z = 0$$

ce qui entraîne $x = y = z = 0$

Par suite, la seule valeur propre de T est $\lambda = 1$, la dimension du sous-espace associé est 1 (et non 3) et la matrice T n'est pas diagonalisable.

Problème n° 4

1) On a de façon triviale $U(0) = 1$

$$U(1) = \int_{[0,1]} (1 - t^2)^{1/2} dt$$

On fait le changement de variable $t = \sin u$

$$U(1) = \int_{[0,\pi/2]} \cos^2 u \, du = \int_{[0,\pi/2]} (1 + \cos 2u)/2 \, du = \frac{1}{2}[u + \sin 2u/2] \text{ à prendre entre } 0 \text{ et } \pi/2, \text{ d'où :}$$

$$U(1) = \pi/4$$

2) Pour tout $t \in [0, 1]$, on a la majoration $(1 - t^2)^{1/2} \leq 1$

Or $(1 - t^2)^{(n+1)/2} = (1 - t^2)^{1/2} (1 - t^2)^{n/2}$, donc $(1 - t^2)^{(n+1)/2} \leq (1 - t^2)^{n/2}$

D'où $U(n+1) \leq U(n)$

3) Faisons une intégration par parties avec : $u'(t) = 1$, $u(t) = t$, $v(t) = (1 - t^2)^{n/2}$, et donc $v'(t) = -nt(1 - t^2)^{(n-2)/2}$

$$U(n) = [t(1 - t^2)^{n/2}]_{[0,1]} + n \int_{[0,1]} t^2(1 - t^2)^{(n-2)/2} dt$$

$$U(n) = n \int_{[0,1]} (t^2 - 1 + 1)(1 - t^2)^{(n-2)/2} dt = n (-U(n) + U(n-2))$$

On obtient le résultat suivant :

$$(n + 1) U(n) = n U(n - 2)$$

On a donc $U(n) = U(n - 2) n/(n + 1)$ pour tout n supérieur ou égal à 2.

Cas $n = 2p$

$$U(2p) = [2p \times 2(p - 1) \times \dots \times 2 / (2p + 1) \times (2p - 1) \times \dots \times 5 \times 3] U(0)$$

$$U(2p) = [2^p p!]^2 / (2p + 1)!$$

Cas $n = 2p - 1$

$$U(2p - 1) = [(2p - 1) \times (2p - 3) \times \dots \times 3 / 2p \times 2(p - 1) \times \dots \times 4] U(1)$$

$$U(2p - 1) = \{(2p)! / [2^p p!]^2\} \times \pi/2$$

Problème n° 5

Considérons la suite u_n : $\alpha u_{n+1} - u_n + (1 - \alpha) u_{n-1} = 0$.

C'est une suite linéaire récurrente d'ordre 2, dont l'équation caractéristique est :

$$(C) \quad \alpha x^2 - x + (1 - \alpha) = 0.$$

$$\Delta = (1 - 2\alpha)^2$$

Premier cas : $\alpha = 1/2$

(C) admet une racine double $1/2\alpha = 1$

On sait que dans ce cas la solution générale est donnée par $u_n = a + bn$

Avec les conditions initiales $u_0 = 0$ et $u_K = 1$:

$$a = 0$$

$$a + bK = 1 \Rightarrow b = 1/K$$

$$u_n = n/K$$

Deuxième cas : $\alpha \neq 1/2$

L'équation (C) admet deux racines distinctes :

$$x' = (1 - (1 - 2\alpha)) / 2\alpha = 1$$

$$x'' = (1 + (1 - 2\alpha)) / 2\alpha = (1 - \alpha)/\alpha$$

La solution générale est de la forme $u_n = a(x')^n + b(x'')^n = a + b((1 - \alpha)/\alpha)^n$

Avec les conditions initiales $u_0 = 0$ et $u_K = 1$:

$$a = 1/[1 - ((1 - \alpha)/\alpha)^K]$$

$$b = -1/[1 - ((1 - \alpha)/\alpha)^K]$$

$$\text{D'où : } u_n = [1 - ((1 - \alpha)/\alpha)^n] / [1 - ((1 - \alpha)/\alpha)^K]$$

En ce qui concerne la suite v_n , la seule différence concerne les conditions initiales.
On trouve ainsi les résultats suivants :

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, $v_n = 1 - n/K$

Pour $\alpha \neq \frac{1}{2}$, les équations vérifiées par les constantes a et b sont :

$$a + b = 1$$

$$a + b((1 - \alpha)/\alpha)^K = 0$$

où encore :

$$a = - ((1 - \alpha)/\alpha)^K / [1 - ((1 - \alpha)/\alpha)^K]$$

$$b = 1 / [1 - ((1 - \alpha)/\alpha)^K]$$

$$v_n = [((1 - \alpha)/\alpha)^n - ((1 - \alpha)/\alpha)^K] / [1 - ((1 - \alpha)/\alpha)^K]$$

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2002

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

CORRIGE DE L'EPREUVE D'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Exercice n° 1

- 1) Soit X la v.a. nombre de ventes, alors la loi de X est une loi binomiale de paramètres $n=824$ et $p=0,9$. Les valeurs de n et de p vérifient la formule donnée qui permet d'approximer la loi binomiale par une loi normale, donc on fait comme si X suit une loi normale de moyenne 741,6 et d'écart type 8,6. En utilisant la table donnée, on trouve, par interpolation linéaire, une valeur de 738 machines à acheter.
- 2) Avec la somme récupérée au titre de l'assurance, le BdE peut financer 40,7 pannes. Soit Z la v.a. nombre de réparations, on sait que Z suit une loi binomiale de paramètres $n=740$ et $p=0,04$. Les valeurs de n et de p vérifient la formule donnée, donc on considère que Z peut suivre une loi normale de moyenne 29,6 et d'écart type 5,3. En utilisant la loi normale centrée réduite, on est conduit à calculer $P(T>2,09)$ et on obtient environ 1,8% par interpolation linéaire.

Exercice n° 2

Il n'y a pas de corrigé type pour cet exercice mais on pouvait évoquer :

- que l'Ile-de-France est la région disposant du RDB par habitant le plus élevé ;
- qu'à l'inverse, la région Nord-Pas-de-Calais est la région disposant du RDB par habitant le plus faible ;
- que chaque habitant dispose en moyenne de 94.000 francs ;
- que 5 régions (Ile-de-France, Rhône-Alpes, Provence-Alpes-Côte d'Azur, Nord-Pas-de-Calais, Pays de la Loire), les plus peuplées de France, concentrent à elles seules 50% du revenu ;
- que les revenus du travail caractérisent plutôt les régions du nord de la France ;
- que les prestations sociales bénéficient plutôt à la province ;
-

