ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Première partie

1 – $D(f, g) = \text{Sup}_{x \in U} (|f(x) - g(x)|) = 0 \iff |f(x) - g(x)| = 0$ pour tout $x \in U$
$\iff f(x) = g(x)\ \forall x \in U \iff$ f identique à g

2 – On sait que $|f(x) - g(x)| = |g(x) - f(x)|\ \forall x \in U$, d'où $D(f, g) = D(g, f)$

3 – $\forall x \in U$, $f - g = f - h + h - g$
D'où $|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|$

Et donc le résultat.

D est une <u>distance</u> sur l'ensemble F.

4 – On note par d(x) la différence $f(x) - g(x)$.
On montre facilement que d atteint son maximum sur U au point $x = ½$, et que ce maximum D(f, g) vaut ¼.
D(f, g) est l'écart le plus grand mesuré parallèlement à l'axe des ordonnées entre les graphes des fonctions f et g.

5 – Comme pour la question précédente, soit par le calcul, soit par la représentation graphique, on établit $D(f, g) = 1$. L'écart maximum entre les graphes de f et g est atteint pour $x = ½$.

6 – $d(x) = \cos\pi x - \sin\pi x$; $d'(x) = -\pi(\sin\pi x + \cos\pi x)$.
Il est facile de montrer que d décroît de 1 pour $x = 0$ à $-\sqrt{2}$ pour $x = ¾$.
$D(f, g) = \sqrt{2}$.

7 – Prenons $f(x) = 2\cos\pi x$. $D(f, O) = 2$, atteint en $x = 0$ ou $x = 1$.

Deuxième partie

8 – On sait que la valeur absolue de l'intégrale d'une fonction est majorée par l'intégrale de la valeur absolue de cette fonction.
D'où :

$$\left|\int_U f(t)\,dt - \int_U g(t)\,dt\right| \leq \int_U \left|f(t) - g(t)\right| dt$$

Soit M = D(f, g) le sup sur U de $|f(t) - g(t)|$.

On a de façon évidente, en majorant $|f(t) - g(t)|$ par M dans la deuxième intégrale :

$$\left|\int_U f(t)\,dt - \int_U g(t)\,dt\right| \leq M = D(f, g)$$

9 – $f_n(x) = (\sin n^2x) / n$

$D(f_n, O) = \text{Sup } |\sin n^2x| / n = 1 / n$ car le maximum en valeur absolue du numérateur est 1, atteint pour $x = \pi / 2n^2$ qui est bien dans U dès que n est supérieur ou égal à 2.

$f'_n(x) = n(\cos n^2x)$; le sup sur U de $n(\cos n^2x)$ est égal à n, atteint pour x = 0 ou π/n^2.

Troisième partie

11 – On remarque que $P_n(x) = \Sigma_k (-1)^k (x/2)^k$, où k varie de 0 à n et $x \in U$, n'est autre que la somme des n+1 premiers termes d'une série géométrique de premier terme 1 et de raison $-x/2$.

$P_n(x) = [1 - (-x/2)^{n+1}]/[1 + x/2]$

Donc un calcul élémentaire permet d'établir que:
$f(x) - P_n(x) = - (x/2)^{n+1} / [1 + x/2]$

D'où : $|f(x) - P_n(x)| = (x/2)^{n+1} / [1 + x/2]$, quantité notée d(x)

Le calcul de d'(x) montre que la dérivée de d(x) a le signe de x^n (n + 1 – nx/2), c'est-à-dire est positif ou nul sur U.
La fonction d(x) est donc croissante sur U, son maximum est ainsi atteint en x = 1 et :

$D(f, g) = (1/2)^{n+1}/(1 + ½) = 1 / (3.2^n)$.

12 a – Soit à établir l'égalité suivante :
(E) $e^x – P_n(x) = J(n, x)$
où J(n, x) est l'intégrale $\int_{[0,x]} [e^t (x–t)^n /n!]\, dt$

Faisons une intégration par parties pour calculer J(n, x) : on prend $u(t) = e^t$ et $v'(t) = (x–t)^n /n!$.

On obtient : $u'(t) = e^t$ et $v(t) = – (x–t)^{n+1} /(n+1)!$.

D'où :

$$J(n, x) = [– e^t (x–t)^{n+1} /(n+1)!]^x_0 + \int_{[0,x]} [e^t (x–t)^{n+1} /(n+1)!]\, dt$$

$$J(n, x) = x^{n+1} /(n+1)! + J(n+1, x)$$

De la relation précédente, on en déduit :

- L'égalité (E) est évidemment vérifiée pour n = 1
- Supposons que (E) soit vérifiée au niveau n. On a :

$$e^x – P_n(x) = J(n, x) = x^{n+1} /(n+1)! + J(n+1, x)$$

Or $P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{n+1} /(n+1)!$

D'où le résultat cherché :

$$e^x – P_{n+1}(x) = J(n+1, x)$$

12 b – On a :

$$|e^x – P_n(x)| = \left| \int_{[0,x]} e^t (x–t)^n /n!\, dt \right|$$

Or, $\forall\, t \in [0, x]$, $e^t \leq e$ (car $x \leq 1$), d'où :

$0 \leq e^t (x-t)^n /n! \leq e\, (x-t)^n /n!$

Par intégration :

$0 \leq \int_{[0,x]} e^t (x-t)^n /n! \leq \int_{[0,x]} e\, (x-t)^n /n! = e[-(x-t)^{n+1} /(n+1)!]^x_0$

$= e\, x^{n+1} /(n+1)!$

$\forall\, x \in U$, $|e^x - P_n(x)| \leq e\, x^{n+1} /(n+1)! \leq e/(n+1)!$

Comme cette majoration est vraie quel que soit x, $D(f, P_n) \leq e/(n+1)!$

13 a – Les premiers polynômes de la suite sont :

$P_1(x) = x$

$P_2(x) = 3\, P_1(x/3) - 4\, (P_1(x/3))^3 = x - 4\, x^3/27$

De même :

$P_3(x) = 3\, P_2(x/3) - 4\, (P_2(x/3))^3 = x - 40\, x^3/27 + 16\, x^5/3^7 - 64\, x^7/3^{12} + 256\, x^9/3^{18}$

13 b – $T(x) = 3x - 4\, x^3$ définie pour x entre –1 et +1 (intervalle noté A)

On remarque immédiatement que la récurrence sur les polynômes s'écrit :
$P_{n+1}(x) = T(P_n(x/3))$

Un calcul élémentaire montre que T' est négative entre – 1 et – ½, positive entre – ½ et ½ et négative entre ½ et 1. L'application T est donc décroissante de 1 à – 1 entre – 1 et – ½, croissante de – 1 à 1 entre – ½ et ½ et à nouveau décroissante de 1 à – 1 entre ½ et 1.

On constate donc que $\forall\, x \in A$, $T(x) \in A$.

On montre en outre que T'' est positive entre – 1 et 0, négative entre 0 et 1, et donc T' croit de –9 à 3 entre – 1 et 0 puis décroit de 3 à – 9 entre 0 et 1.

Il s'en suit que $\forall\, x \in A$, $|T'(x)| \leq 9$.

D'après la formule des accroissements finis, on a :

$T(u) - T(v) = (u - v)\,T'(w)$, w entre u et v, d'où :

$|T(u) - T(v)| = |u - v|\,|T'(w)|$

En majorant $|T'(w)|$ par 9, on obtient :

$$\forall\, u, v \in A \quad |T(u) - T(v)| \leq 9\,|u - v|$$

13 c – Calcul classique en écrivant $\sin(2a + a) = \sin 2a \cos a + \cos 2a \sin a$
En remplaçant $\sin 2a$ par $2\sin a \cos a$ et $\cos 2a$ par $\cos^2 a - \sin^2 a$, on a (en notant $\sin a = S$ et $\cos a = C$) :

$\sin 3a = 2S(1 - S^2) + S(1 - 2S^2) = 3S - 4S^3$

On remarque immédiatement que $\sin x = T(\sin(x/3))$.

13 d – Exercice classique ; il suffit d'étudier sur U les variations des fonctions intermédiaires $u(x) = x - \sin x$ et $v(x) = x^3/6 - x + \sin x$ pour obtenir la double inégalité recherchée :

$$0 \leq x - \sin x \leq x^3/6$$

13 e – Procédons par récurrence :

- Pour n = 1, on a bien sûr $P_1(x) \in A$ puisque $P_1(x) = x$, et $|P_1(x) - \sin x| \leq x^3 / 6$, d'après les inégalités de la sous-question 13d.

- Supposons la propriété vérifiée au rang n.

Faisons intervenir l'application T.

On a remarqué précédemment que $P_{n+1}(x) = T(P_n(x/3))$. Or puisque $P_n(x/3) \in A$, $T(P_n(x/3)) \in A$ d'après l'étude de l'application T à la sous-question 13b.

De plus, $\sin x = T(\sin(x/3))$, et donc :

$|P_{n+1}(x) - \sin x| = |T(P_n(x/3)) - T(\sin(x/3))| \leq 9\,|P_n(x/3) - \sin(x/3)| \leq 9\,(x/3)^3 / (2.3^n) =$
$= x^3 / (2.3^{n+1})$

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

EXERCICE n° 1

1 – On peut écrire T = a I + R avec R la matrice d'ordre 3 de coefficients r(i, j) dont tous les coefficients sont nuls sauf r(1, 2) = r(2, 3) = b et r(1, 3) = c.

Un calcul simple montre que R^2 est nulle sauf le coefficient (1, 3) égal à b^2 et que $R^k = 0$ pour $k \geq 3$.

2 – En appliquant la formule du binôme à T = aI + R, et en tenant compte de ce qui précède, on obtient :

$$T^n = a^n I + n a^{n-1} R + n(n-1) a^{n-2} R^2 / 2$$

La matrice T^n appartient à la classe Δ avec comme élément diagonal a^n, élément de type « b » $n a^{n-1}b$, et élément de type « c » $n a^{n-1}c + n(n-1) a^{n-2} b^2 / 2$.

3 a – On a : $AX = X^n.X = X^{n+1} = X.X^n = XA$
Donc X commute avec A.

3 b – Ecrivons de façon générique la matrice X sous la forme :

$$X = \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ G & h & i \end{matrix}$$

Le calcul de XA donne pour éléments :

(1, 1) a
(1, 2) 2a + b
(1, 3) 3a + 2b + c
(2, 1) d
(2, 2) 2d + e
(2, 3) 3d + 2e + f
(3, 1) g
(3, 2) 2g + h
(3, 3) 3g + 2h + i

De même, le calcul de AX conduit à :

(1, 1) a + 2d + 3g
(1, 2) b + 2^e + 3h
(1, 3) c + 2f + 3i
(2, 1) d + 2g
(2, 2) e + 2h
(2, 3) f + 2i
(3, 1) g
(3, 2) h
(3, 3) i

Le fait que AX = XA entraîne que :

g = 0 d'après (3, 2)
h = 0 d'après (3, 3)
h = d = 0 d'après (2, 2)
e = i d'après (2, 3)
a = e d'après (1, 2)
a = e = i et donc b = f d'après (1, 3)

X appartient donc à la classe Δ.

3 c – Soit à résoudre l'équation (E). Compte tenu de la forme particulière de A, on a le système :

$a^n = 1$
$n\, a^{n-1} b = 2$
$n\, a^{n-1} c + n(n-1)\, a^{n-2}\, b^2 / 2 = 3$

Pour n impair, on obtient :

$a = 1$
$b = 2/n$
$nc + 2(n-1)/n = 3$

Il y a une unique solution pour n impair : T(1, 2/n, (n+2)/n²)

Pour n pair, on trouve le triplet (1, 2/n, (n+2)/n²) ainsi que le triplet opposé (–1, – 2/n, – (n+2)/n²).

EXERCICE n° 2

1 – La somme des équations du système donne a + b + c + d = 0. Cette condition est donc nécessaire pour que le système admette au moins une solution.

Supposons cette solution satisfaite, l'une des équations est la conséquence des autres ; calculons y, z et t en fonction de x.

$y = a + 0{,}75x$
$z = b + y – 0{,}25x = a + b + 0{,}5x$
$t = 0{,}25x – d$

La condition supplémentaire équivaut alors à $2a + b + d + 2{,}5x = r$.

Il en résulte les expressions suivantes :

$x = 2(r – 3a – 2b – c) / 5$
$y = (3r + a – 6b – 3c) / 10$
$z = (r + 2a + 3b – c) / 5$
$t = (r + 7a + 8b + 9c) / 10$

2 a – En appliquant la définition de m_n et M_n, on peut écrire pour tout n :
$m_n \leq u_n \leq M_n$, $m_n \leq u_{n+1} \leq M_n$, $m_n \leq u_{n+2} \leq M_n$, $m_n \leq u_{n+3} \leq M_n$; il en résulte que :

$4m_n \leq u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} \leq 4M_n$

ou encore $m_n \leq u_{n+4} \leq M_n$

2 b – Puisque m_n est inférieur à u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+3}, u_{n+4} , il est inférieur au plus petit de quatre et donc $m_n \leq m_{n+1}$, et la suite m_n est croissante.

De même, on a $M_{n+1} \leq M_n$, et la suite M_n est décroissante.

On peut donc écrire pour tout entier n : $m_0 \leq m_n \leq M_n \leq M_0$

Il en résulte que les suites m_n et M_n sont respectivement majorée et minorée : ces deux suites sont donc convergentes et leurs limites m et M vérifient $m \leq M$.

2 c – Parmi les quatre nombres u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+3}, l'un est égal à m_n et les autres sont inférieurs à M_n. Il en résulte $u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} \leq 3M_n + m_n$, ou encore $u_{n+4} \leq 0{,}75M_n + 0{,}25m_n$.

2 d – Par ailleurs, la suite m_n étant croissante de limite m, on a $u_{n+4} \leq 0{,}75M_n + 0{,}25m$.
En remplaçant n par n+1, n+2, n+3, on peut écrire $4u_{n+5} \leq 3M_{n+1} + m$, $4u_{n+6} \leq 3M_{n+2} + m$, $4u_{n+7} \leq 3M_{n+3} + m$. Or la suite M_n est décroissante donc pour k = n+', n+5, n+6, n+7, on a $u_k \leq 0{,}75M_n + 0{,}25m$ et le maximum M_{n+4} de ces nombres vérifie alors est $M_{n+4} \leq 0{,}75M_n + 0{,}25m$.

2 e – Puisque la suite M_n converge vers M, en passant à la limite dans cette inégalité, on a $M \leq m$.
On sait en plus que $m \leq M$, d'où m = M et les deux suites m_n et M_n sont adjacentes.

Pour tout n, l'inégalité $m_n \leq u_n \leq M_n$ prouve que u_n converge vers la limite commune à m_n et M_n.

EXERCICE n° 3

1 – La fonction s est impaire, s(0) = 0.
$s'(x) = (e^x + e^{-x})/2$
La tangente en (0, 0) est la droite d'équation y = x, car s'(0) = 1.
$s''(x) = s(x)$
Comme s est croissante sur R et s(0) = 0, $s(x) \leq 0$ pour tout $x \leq 0$, et $s(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$.
Donc s est convexe sur R^-, concave sur R^+.
Il est clair que s(x) tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$: branche parabolique dans la direction de Oy.

2 – Continue et strictement croissante sur R, s est une bijection de R sur R.

Soit a un réel ; s(x) = a est équivalent à $x = \ln(a + (1 + a^2)^{1/2})$

Ainsi, h, inverse de s, est une application de R dans R définie par $h(x) = \ln(x + (1 + x^2)^{1/2})$

3 – Pour tout x réel, $1 + x^2$ est positif strictement et donc $(1 + x^2)^{1/2}$ est dérivable sur R, donc f également comme somme et composée de fonctions dérivables.

Il est facile d'établir que $h'(x) = 1 / (1 + x^2)^{1/2}$

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

CORRIGE DE LA DOCUMENTATION STATISTIQUE

EXERCICE n° 1

Question 1

Période	France	USA	Autres	Total
1960-1964	50,3%	29,4%	20,3%	100,0%
1965-1969	50,6%	27,0%	22,4%	100,0%
1970-1974	53,5%	23,3%	23,2%	100,0%
1975-1979	48,8%	29,3%	21,9%	100,0%
1980-1984	49,4%	33,6%	17,0%	100,0%
1985-1989	35,7%	44,9%	19,4%	100,0%

Graphique : histogramme ou camembert par exemple

Commentaires : part de la France diminue au profit des USA. En plus, le nombre d'entrées chute…

EXERCICE n° 2

Question 1

Courbe non tracée ici

Période 1 : 1960-1968
Période 2 : 1968-1982
Période 3 : 1982-1990

La pente correspond à l'évolution (diminution pour les périodes 1 et 3, stabilité pour la période 2) annuelle du nombre d'entrées (exprimé en millions). Pour la dernière période, la lecture graphique donne une diminution annuelle de l'ordre de 10 millions d'entrées (environ -7%/an), ce qui donne un chiffre pour 1991 de l'ordre de 100 millions d'entrées si on prend en compte le tracé de la droite.

Question 2

Année	E (indice)	Prix (indice)	IGP	Prix relatif
1960	100	100	100	100
1966	66	180	123,9	145
1972	52	315	171,2	184
1978	50	637	307,9	207
1984	54	1117	569,9	196
1990	34	1498	695,7	215

Question 3

Courbe non tracée ici

Le nombre d'entrées en 1991 est d'environ 130 millions selon cette méthode, soit plus élevé qu'avec la méthode précédente