

AVRIL 1998

**CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE**

**OPTION ECONOMIE**

**CORRIGE DE LA DOCUMENTATION STATISTIQUE**

**EXERCICE n° 1**

1) Pour conclure, il était proposé de compléter le tableau 2 de l'énoncé. On trouvera ci-dessous celui-ci complété (les chiffres que les candidats devaient trouver sont inscrits en italique)

|              | (1)   | (2)     | (3)    | (4)            | (5)              | (6)       |
|--------------|-------|---------|--------|----------------|------------------|-----------|
|              | $n_i$ | $p_i$   | $np_i$ | $(n_i - np_i)$ | $(n_i - np_i)^2$ | $(5)/(3)$ |
| <b>1</b>     | 222   | 0,56250 | 225    | -3             | 9                | 0,04      |
| <b>2</b>     | 50    | 0,13125 | 52,5   | -2,5           | 6,25             | 0,12      |
| <b>3</b>     | 28    | 0,05625 | 22,5   | 5,5            | 30,25            | 1,34      |
| <b>4</b>     | 78    | 0,18750 | 75     | 3              | 9                | 0,12      |
| <b>5</b>     | 20    | 0,04375 | 17,5   | 2,5            | 6,25             | 0,36      |
| <b>6</b>     | 2     | 0,01875 | 7,5    | -5,5           | 30,25            | 4,03      |
| <b>Total</b> | 400   | 1,00000 | 400    |                |                  | 6,01      |

Conclusion : la valeur calculée de 6,01 étant supérieure à la valeur donnée 5,99, il y a dépendance entre le niveau de satisfaction et le fait de renvoyer la fiche d'appréciation. On constate que le calcul opéré à la case n°6 (croisement des critères « clients n'ayant pas retourné la fiche » et « clients peu ou pas satisfaits ») contribue pour beaucoup à cette conclusion : c'est en effet là que l'écart est le plus fort

2) La moyenne vaut 1,964 jours et la variance est égale à 1,955 jours<sup>2</sup>

3) Les candidats avaient une grande marge de manœuvre pour le calcul. Le résultat devait être voisin de 15.140 interventions.

**EXERCICE n° 2**

Pour cet exercice, il n'y a pas de corrigé type. Cependant, quelques idées devaient être énoncées :

- le salaire brut a augmenté de 0,6% en francs constants entre 95 et 96 ;
- le salaire net a reculé de 0,1% en francs constants entre 95 et 96 ;
- A corps, grade, échelon, identiques, il y a recul en brut et en net ;
- le salaire moyen annuel brut s'établit à 169.030 francs ;
- l'éventail des salaires s'est ouvert...

AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice:

1) On remarque que 2 n'est pas décomposable,  
que  $8 = -1 - 2 - 3 - 4 + 5 + 6 + 7$   
 $= 1 - 2 - 3 + 4 - 5 + 6 + 7$   
 $= -1 + 2 + 3 - 4 - 5 + 6 + 7$   
et...

Donc:

- a) tout nombre pair n'est pas décomposable
- b) la décomposition n'est pas unique

2) On remarque que 6 n'est pas décomposable.  
Nous prouvons maintenant que les multiples de 4 sont  
décomposables

$4p$

a) vrai pour  $p = 1$

$$b) 4p = \sum_{k=1}^{4p-1} \varepsilon_k k$$

$$\begin{aligned} 4p+4 &= \sum_{k=1}^{4p-1} \varepsilon_k k + 4 = \sum_{k=1}^{4p-1} \varepsilon_k k - 1 + 2 + 3 \\ &= \sum_{k=1}^{4p-1} \varepsilon_k k + 4p - (4p+1) + (4p+2) + (4p+3) \\ &= \sum_{k=1}^{4p+3} \varepsilon_k k \end{aligned}$$

### Problème 1

$$1) \quad 2r^2 - r - 1 = 0$$

$$\Rightarrow r_1 = 1, \quad r_2 = -\frac{1}{2}$$

$$u_n = \lambda(1)^n + \mu\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \lambda + \mu\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$u_0 = a = \lambda + \mu$$

$$u_1 = b = \lambda - \frac{\mu}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{a+2b}{3} \quad \mu = \frac{2(a-b)}{3}$$

$$u_n = \frac{a+2b}{3} + \frac{2(a-b)}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$2) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{a+2b}{3}$$

$$3) \quad v_n = u_{n+1} - u_n$$

$$u_{n+2} = v_{n+1} + u_{n+1}$$

$$2(v_{n+1} + u_{n+1}) = u_{n+1} + u_n$$

$$\Rightarrow 2v_{n+1} = -(u_{n+1} - u_n)$$

$$\begin{cases} v_{n+1} = -\frac{1}{2} v_n \\ v_0 = b - a \end{cases}$$

$$v_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n v_0 = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (b - a)$$

$$v_{n-1} = u_n - u_{n-1}$$

⋮

$$v_0 = u_1 - u_0$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k v_0 = u_n - u_0$$

$$u_n = a + v_0 \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

$$u_n = a + (b-a) \frac{1 - (-1/2)^n}{3/2}$$

$$= \frac{a+2b}{3} + \frac{2(a-b)}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

On retrouve la forme générale de la question 1.

4)  $u_{n+2} + \frac{u_{n+1}}{2} = \frac{u_{n+1}}{2} + \frac{u_n}{2}$

~~$\frac{1}{2} \left( \frac{u_{n+1}}{2} + \frac{u_n}{2} \right) = \frac{u_n}{2}$~~

$\Rightarrow w_{n+1} = w_n$

La suite  $(w_n)$  est constante, égale à  $w_0 = u_1 + \frac{u_0}{2} = b + \frac{a}{2}$

$$u_{n+1} + \frac{u_n}{2} = b + \frac{a}{2}$$

$$u_{n+1} = -\frac{1}{2} u_n + b + \frac{a}{2}$$

$$\begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = \frac{a}{2} + b \end{cases}$$

5)  $x_n > 0 \quad \forall n$

On passe au logarithme:  $u_n = \ln x_n$

$$u_{n+2} = \frac{1}{2} (u_{n+1} + u_n)$$

$$u_0 = \ln 1 = 0$$

$$u_1 = \ln 2$$

$$x_n = \exp \left\{ \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{2}{3} \ln 2 \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\}$$

$$= e^{\frac{2}{3} \ln 2 [1 - (-1/2)^n]}$$

$$u_n \rightarrow \frac{2}{3} \ln 2 \Rightarrow x_n \rightarrow e^{\frac{2}{3} \ln 2} = 2^{2/3}$$

Problème 2:  $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt$

1)  $I(0) = \pi/2$

$I(1) = \int_0^{\pi/2} \cos t \, dt = [\sin t]_0^{\pi/2} = 1$

$I(2) = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2} \, dt$

$= \left[ \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$

2)  $I(n+1) = \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1} t \, dt$   
 $= (\sin t \cos^n t)_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin t \cos^{n-2} t \, dt$

$= (n-1) \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 t) \cos^{n-2} t \, dt$

$= (n-1) I(n-2) - (n-1) I(n)$

$n I(n) = (n-1) I(n-2)$

3) Sur  $[0, \pi/2]$ ,  $\cos t \geq 0 \Rightarrow I(n) \geq 0$

$I_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \cos t \, dt \leq \int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt = I(n)$

en majorant  $\cos t$  par 1

4) On a:  $I_{n+1} \leq I(n+1) \leq I(n)$

$\frac{I(n+1)}{I(n)} \leq \frac{I(n+1)}{I(n)} \leq 1$

$\downarrow$   
 $= \frac{n+1}{n+2}$

D'où, en passant à la limite:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I(n+1)}{I(n)} = 1$

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE - AVRIL 1998

Exercice 1

CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

$$1) \int_0^1 (1+x)^n dx = \int_1^2 u^n du \quad \text{en posant } u = 1+x$$

$$= \left[ \frac{u^{n+1}}{n+1} \right]_1^2 = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$$

$$2) \int_0^1 (1+x)^n dx = \int_0^1 \left( \sum_{k=0}^n C_n^k x^k \right) dx = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{1}{k+1}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$$

Exercice 2:

$$f_t(x) = \frac{t+1}{x^2+t}$$

$x \in \mathbb{R}, t > 0 \Rightarrow$  dénominateur toujours  $> 0$

$$1) f'_t(x) = \frac{(x^2+t) - (t+1)x^2}{(x^2+t)^2} = \frac{x^2-1}{(x^2+t)^2}$$

1<sup>er</sup> cas:  $|x| > 1$

|           |                 |           |
|-----------|-----------------|-----------|
| t         | 0               | $+\infty$ |
| $f'_t(x)$ |                 | +         |
| $f_t(x)$  | $\frac{1}{x^2}$ | 1         |

2<sup>e</sup> cas:  $|x| < 1$

|           |                 |           |
|-----------|-----------------|-----------|
| t         | 0               | $+\infty$ |
| $f'_t(x)$ |                 | -         |
| $f_t(x)$  | $\frac{1}{x^2}$ | 1         |

3<sup>ème</sup> cas:

$$|x| = 1 \Rightarrow f(x) = 1$$

D'où:

Minimum:

$$m(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{si } |x| > 1$$

$$m(x) = 1 \quad \text{si } |x| = 1$$

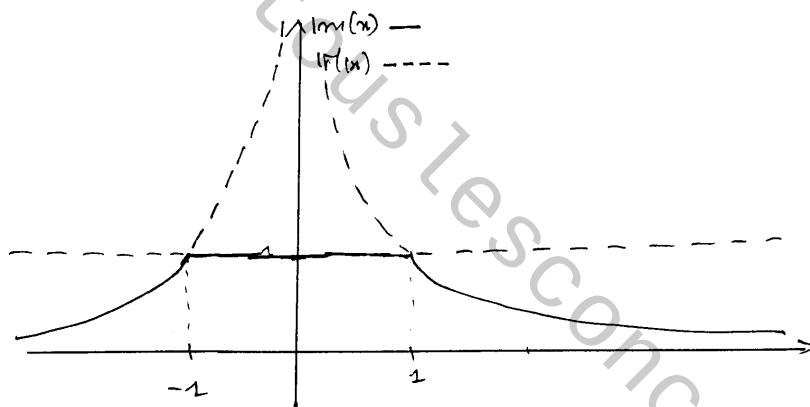
$$m(x) = 1 \quad \text{si } |x| < 1$$

Maximum:

$$M(x) = 1 \quad \text{si } |x| > 1$$

$$M(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{si } |x| < 1$$

$$M(x) = 1 \quad \text{si } |x| = 1$$



Problème:

$$f(x) = \frac{x}{e^x + 1} \quad x \geq 0$$

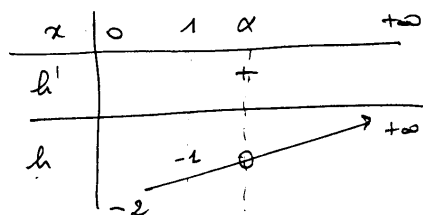
$$1) f'(x) = \frac{e^x + 1 - x e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x(1-x) + 1}{(e^x + 1)^2}$$

$$2) f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(x-1) - 1 = 0$$

$$h(x) = e^x(x-1) - 1$$

$$h'(x) = x e^x$$





$h$  varie continuellement en croissant de  $-2$  à  $+\infty$  qd  $x$  varie de  $0$  à  $+\infty \Rightarrow \exists \alpha / h(\alpha) = 0 = f'(\alpha)$

3)  $\alpha$  vérifie:  $e^\alpha(\alpha-1) - 1 = 0$

et  $f(\alpha) = \frac{\alpha}{e^\alpha + 1}$

$e^\alpha = \frac{\alpha}{f(\alpha)} - 1$

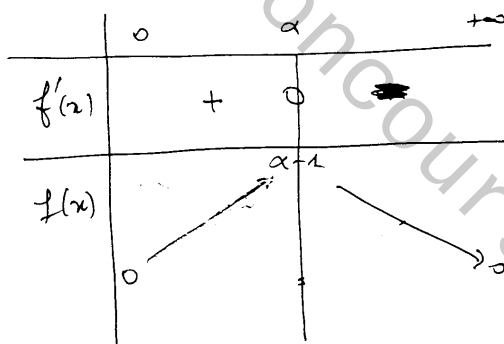
$(\alpha - f(\alpha))(\alpha - 1) - f(\alpha) = 0$

$\alpha^2 - \alpha - \alpha f(\alpha) + f(\alpha) - f(\alpha) = 0$

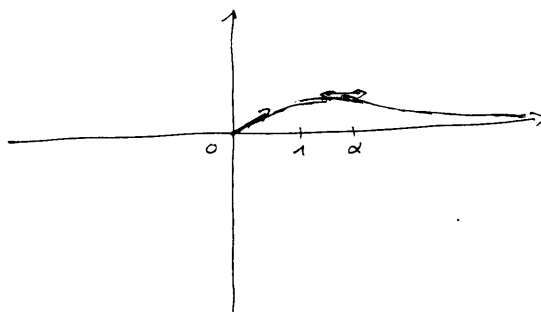
$\alpha - 1 - f(\alpha) = 0$

$\Rightarrow f(\alpha) = \alpha - 1$

4)



$f'(0) = \frac{1}{2}$



5)  $g(x) = 1 + e^{-x}$

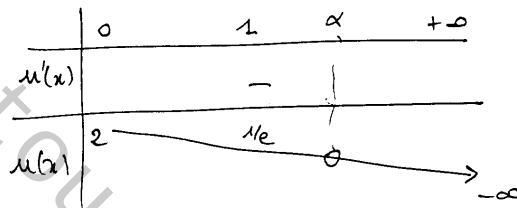
$$g(\alpha) = 1 + e^{-\alpha} = \alpha \Rightarrow \frac{1}{e^{\alpha}} = \alpha - 1 \Rightarrow e^{\alpha}(\alpha - 1) - 1 = 0$$

↓  
(équation vérifiée)  
par  $\alpha \approx 0.2$

Est-elle unique ?

$$u(x) = g(x) - x = 1 + e^{-x} - x$$

$$u'(x) = -e^{-x} - 1 = -\frac{1}{e^x} - 1 < 0$$



$\exists$  1 et 1 seule valeur  $x_0$  telle que  $u(x_0) = g(x_0) - x_0 = 0$

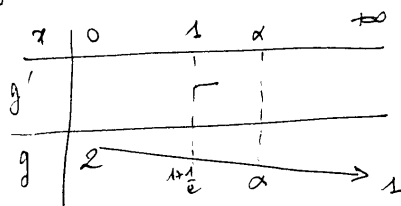
$$\Rightarrow x_0 = \alpha.$$

$$u(1) = \frac{1}{e} > 0 \Rightarrow \alpha > 1$$

$$\begin{aligned} g(\alpha) = \alpha &\Rightarrow 1 + e^{-\alpha} = \alpha \\ &\Leftrightarrow e^{-\alpha} = \alpha - 1 \end{aligned}$$

$$\text{Comme } \alpha > 1, e^{-\alpha} < e^{-1} \Rightarrow \alpha - 1 < e^{-1}$$

6)  $g'(x) = -e^{-x}$



Il est trivial  
que  $g(x) \geq 1$

$$\begin{aligned} \forall x \geq 1 \quad g(x) - g(\alpha) &= (x - \alpha) g'(c) \quad c \geq \alpha \\ |g(x) - g(\alpha)| &= |x - \alpha| \underbrace{|g'(c)|}_{\text{majoré par } |g'(1)| = e^{-1}} \end{aligned}$$

7) En utilisant la réponse à la question 6

$$\underbrace{|g(\alpha_0) - \alpha|}_{= |\alpha_1 - \alpha|} \leq e^{-1} |\alpha_0 - \alpha|$$

$$= |\alpha_1 - \alpha|$$

$$|\alpha_2 - \alpha| \leq e^{-1} |\alpha_1 - \alpha|$$

$\vdots$

$$|\alpha_n - \alpha| \leq e^{-1} |\alpha_{n-1} - \alpha|$$

$$|\alpha_n - \alpha| \leq (e^{-1})^n \underbrace{|\alpha_0 - \alpha|}_{= 1} \quad \text{car } \alpha_0 = 1$$

$< e^{-1}$  d'après la Q.5

$$\Rightarrow |\alpha_n - \alpha| \leq e^{-(n+1)}$$