LA FORME

08

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

UNIVERSITE DE DSCHANG

INSTITUT UNIVERSITAIRE DE TECHNOLOGIE
FOTSO VICTOR DE BANDJOUN
BP 134 BANDJOUN

REPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix-Travail-Patrie

CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE DU CYCLE DE D.U.T.

Septembre 2007

***EPREUVE* :** *MATHEMATIQUES* **Durée** : *4 Heures*

EXERCICE 1 : Fonction logarithme

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{2+\ln x}{x}$.

On note C_f sa représentation graphique dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

1.1.Etudier les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.

1.2.Calculer la dérivée f' de f puis résoudre l'inéquation $f'(x)\geq 0$.

1.3.En déduire le tableau de variation de la fonction f. (On précisera la valeur exacte des éventuels extremums)

1.4.Tracer la courbe C_f. (On pourra se placer sur l'intervalle $]0;2]$)

1.5.Préciser, à l'aide d'un calcul, les coordonnées exactes du point d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses.

EXERCICE 2 : Nombres complexes

2.1.Résoudre dans C, l'équation $Z^3+\overline{Z}=0$. On donnera les solutions sous forme trigonométrique et sous forme algébrique.

2.2.Soit l'équation : $Z^3-(2+2i)Z^2-(13+6i)Z+20+56i=0$

a. Résoudre cette équation sachant que l'une des racines est réelle, noter z_0 cette racine. Les deux autres racines sont z_1 et z_2 avec $|z_1|<|z_2|$.

b. Placer les points z_0, z_1 et z_2 dans plan complexe.

EXERCICE 3 : Suites numériques

Soit une suite numérique de terme général U_n tels que :

$$U_0=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{et } \forall n\in \mathbb{N}^*,\quad U_n=\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

3.1.Soit f la fonction définie par : $f(x)=Log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ où Log désigne le logarithme népérien. Déterminer la fonction dérivée f' de f et calculer U_0.

3.2.Calculer U_1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer U_3.

3.3.a) Démontrer que : $\forall x\in[0,1],\quad 0\leq\dfrac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\leq x^n$

3.3.b) En déduire que la suite de terme général U_n est convergente et calculer sa limite.

EXERCICE 4 : Equations différentielles

4.1.Résoudre l'équation différentielle : $f'' - 5f' + 4f = 0$

4.2.Déterminer la solution particulière f dont la courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) admet pour tangente au point O la droite d'équation $y = -2x + 1$

4.3.On pose $u(x) = 2e^{x} - e^{4x}$. Résoudre dans R (l'ensemble des nombres réels) l'inéquation $u(x) \geq 0$.

4.4.On considère la partie de la courbe d'équation $y = u(x)$ pour $-1 \leq x \leq 0$. En la faisant tourner autour de l'axe des abscisses, on délimite un solide dont le volume est défini par l'intégrale : $V = \pi \int_{-1}^{0} [u(x)]^2 dx$. Calculer la valeur exacte de V.

EXERCICE 5: Probabilités

Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher : 4 jetons blancs marqués 0 ; 3 jetons rouges marqués 7 ; 2 jetons blancs marqués 2 ; 1 jeton rouge marqué 5.

5.1.On tire simultanément 4 jetons du sac. Quel est le nombre de tirages possibles ?

5.2.On suppose que tous les tirages sont équiprobables, et on considère les évènements suivants :

A : les 4 numéros sont identiques ;
B : avec les jetons tirés, on peut former le nombre 2000 ;
C : tous les jetons sont blancs ;
D : tous les jetons sont de la même couleur.

a) Calculer la probabilité des évènements A, B, C et D.
b) On suppose que l'évènement C est réalisé, calculer alors la probabilité de l'événement B.

5.3.On établit la règle suivante :

si le joueur peut former le nombre 5000, il gagne 75 francs ;
si le joueur peut former le nombre 7000, il gagne 50 francs ;
si le joueur peut former le nombre 2000, il gagne 20 francs ;
si le joueur peut former le nombre 0000, il perd 25 francs ;
pour tous les autres tirages, il perd 5 francs.

Soit G, la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. Etablir la loi de probabilité de G et calculer son espérance mathématique.

LA FORME

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

UNIVERSITE DE DSCHANG

INSTITUT UNIVERSITAIRE DE TECHNOLOGIE
FOTSO VICTOR DE BANDJOUN
BP 134 BANDJOUN

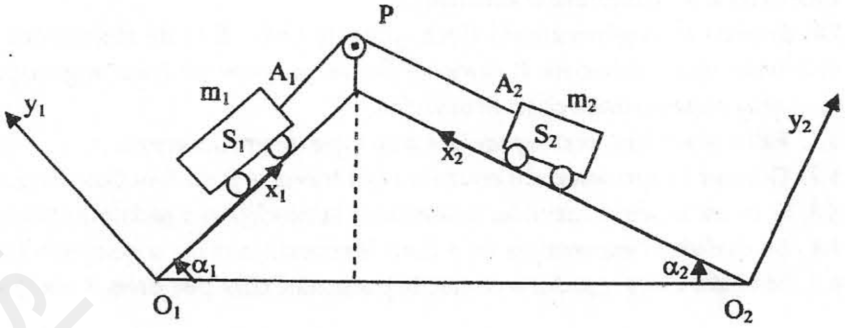
REPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix-Travail-Patrie

CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE DU CYCLE DE D.U.T.
Septembre 2007

EPREUVE : *PHYSIQUES* **Durée** : *4 Heures*

EXERCICE 1 : Plan incliné

On considère le dispositif suivant :
Le système constitué des solides S_1 et S_2 est lâché avec une vitesse initiale nulle lorsque S_1 se trouve en O_1. Le solide S_2 se déplace vers O_2 et entraîne le solide S_1 par un fil A_1PA_2 passant à travers une poulie.



On donne m_1=10g, m_2=50g, $\alpha_1 = 60°$, $\alpha_2 = 30°$ et $g = 10N/kg$

L : longueur du fil $L = A_1P + A_2P = 1\,m$. On négligera les dimensions de la poulie et on supposera le fil inextensible.

1.1. En isolant le solide S_1, et en travaillant dans le repère (O, x_1, y_1), trouver la relation entre la tension du fil (A_1P) T_1, l'accélération γ_{x_1} du centre de gravité de S_1, la masse m_1, l'angle α_1 et g.

1.2. Même question à propos du solide S2 et des grandeurs, T_2, γ_{x_2}, m_2, α_2 et g.

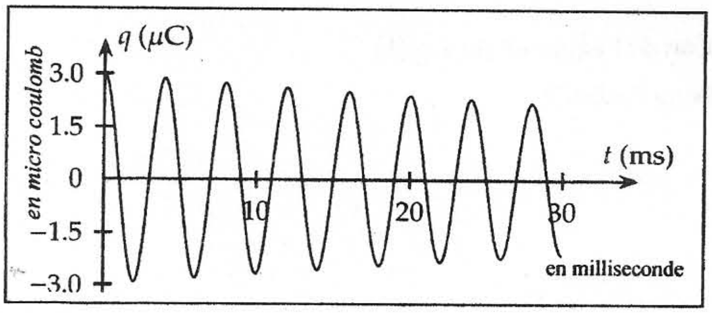
1.3. Calculer la tension du fil.

1.4. Déterminer la durée t_2-t_1, avec t_1 considéré comme l'instant où S_2 part de P et t_2 l'instant où le solide S_1 arrive en P.

1.5. Quelle est la vitesse de S_1 lorsqu'il arrive en P à l'instant t_2.

EXERCICE 2 : Oscillateur

Un oscillateur électrique libre est formé d'un condensateur initialement chargé, de capacité $C = 1{,}0\mu F$, d'un conducteur ohmique de résistance R et d'une bobine d'inductance $L = 0{,}40H$ et de résistance négligeable. L'enregistrement de la tension aux bornes du condensateur a permis de tracer la courbe ci-dessous où q désigne la charge de son armature positive.



2.1. Déterminer la pseudo-période T des oscillations.

2.2. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la charge *q(t)* à chaque instant dans le cas où *R* est considérée comme nulle.

2.3. Vérifier qu'avec une période $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$, la fonction suivante : $q(t) = Q_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$ est solution de cette équation.

2.4. Calculer la période T_0 et comparer à la pseudo-période T.

2.5. Quelle différence présente la solution *q(t)* trouvée par rapport à la courbe proposée ?

2.6. Quelle est la cause de cette différence ?

EXERCICE 3 : Electrostatique

Un faisceau d'électrons est émis dans le vide par un filament F situé sur une plaque A, avec une vitesse initiale négligeable. Il est accéléré par une tension U appliquée entre la plaque A et une autre plaque B parallèle à la première : $U = V_A - V_B$. La distance entre les plaques est $d = 4cm$. La plaque B est percée d'un trou noté O. A la sortie du trou O le faisceau d'électrons est soumis à la pesanteur.

Données : $g = 10 ms^{-2}$; charge d'électron $e = -1{,}610^{-19} C$; $|U| = 200V$.

3.1. Donner le signe de la tension U pour qu'il y ait accélération entre les plaques A et B.
3.2. Déterminer l'accélération entre les plaques A et B.
3.3. Calculer la vitesse avec laquelle les électrons atteignent la plaque B.
3.4. Après la traversée du trou O, quelle est la nature du mouvement des électrons ?

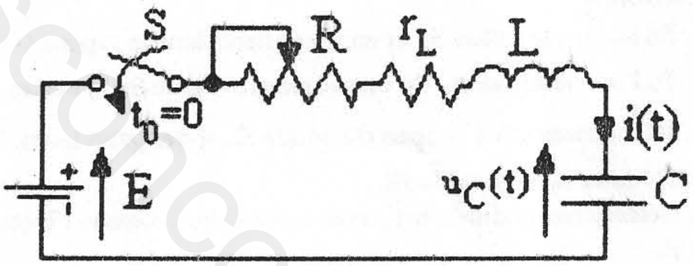
EXERCICE 4 : Générateur électrique

On dispose de n générateurs électriques de f.e.m. E et de résistances internes r chacun que l'on doit brancher sur une résistance extérieure R donnée. On se propose de faire le groupement suivant : p branches en parallèle et m éléments en série dans chaque branche.

4.1. Faire le schéma correspondant à ce type de groupement.
4.2. Donner l'expression du courant I qui traverse R en fonction de n, E, r, R et m.
4.3. Si m est la seule variable, déterminer la condition à satisfaire pour que I soit maximum.
4.4. En déduire l'expression de p dans les conditions de la question 4.3.
4.5. Montrer alors que dans ce cas, la puissance dissipée dans R est maximale.

EXERCICE 5 : Circuit RLC

Soit le circuit électrique de la figure ci-contre constitué d'un condensateur de capacité C, d'une résistance R et d'une bobine d'inductance L de résistance interne r_L. Le condensateur du circuit est initialement déchargé. L'interrupteur S est fermé à l'instant t=0, et un courant $i(t)$ commence à circuler dans le circuit. On donne $E = 100V$, $r_L = 150\Omega$ et $L = 0{,}3\,H$. La résistance R est variable.



5.1. Etablir l'équation de la chute de tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur quelques instants seulement après la fermeture de S et déduire l'équation caractéristique $P(\lambda) = 0$.
5.2. Résoudre l'équation caractéristique dans les trois cas suivants :
   a. $R = 450\,\Omega$ et $C = 3{,}3\,\mu F$
   b. $R = 0\,\Omega$ et $C = 3{,}3\,\mu F$
   c. $R = 0\,\Omega$ et $C = 0{,}13\,\mu F$
5.3. Déduire dans chacun des cas de la question 5.2 la solution de l'équation de $u_C(t)$
5.4. Quelle est la limite de $u_C(t)$ et de $i(t)$ lorsque t tend vers l'infini ?