

**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE  
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE  
ABIDJAN**

**AVRIL 2002**

**CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE**

**OPTIONS MATHEMATIQUES ET ECONOMIE**

**EPREUVE D'ORDRE GENERAL**

**DUREE : 4 HEURES**

*Les candidats traiteront l'un des trois sujets au choix.*

**SUJET n° 1**

Qu'a voulu exprimer l'ancien Président du Sénégal Léopold Sédar SENGHOR dans cette phrase :

«Les hommes doivent s'accepter différents et se vouloir complémentaires». En 2002 cette phrase est-elle toujours d'actualité ?

**SUJET n° 2**

Est ce que vous êtes d'accord avec cette phrase de Jean Rostand biologiste français (1894-1977) ? Donnez des exemples précis.

«La faiblesse des démocraties, c'est qu'il leur faille, trop souvent se renier pour survivre».

**SUJET n° 3**

Oscar Wilde écrivain anglais (1854-1900) a écrit cette phrase :

«Les tragédies des autres sont toujours d'une banalité désespérante». Qu'a t-il voulu exprimer ?

**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE  
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE  
ABIDJAN**

**AVRIL 2002**

**CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE**

**OPTION MATHEMATIQUES**

**DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES**

**DUREE : 4 HEURES**

**EXERCICE n° 1**

Soient deux nombres réels  $a$  et  $b$  strictement positifs fixés. Pour tout entier naturel

$n$ , on pose  $u_n = \prod_{k=0}^n \frac{a+k}{b+k}$  et  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ .

❶ Simplifier l'expression de  $u_n$  dans le cas  $b=a+1$ .

En déduire que, si  $b \leq a+1$ , la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2$  diverge.

On suppose dans toute la suite que  $b > a+1$

❷ Montrer que pour tout entier  $n$ , on a :  $(b-a-1)S_n = a - (n+1+b)u_{n+1}$

❸ En déduire que la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  converge. On note  $S$  sa somme.

❹ Montrer que la suite  $(n+b)u_n$  converge, puis que sa limite est nécessairement nulle. En déduire la valeur de  $S$ .

**EXERCICE n° 2**

Soit  $f$  une fonction réelle définie continue sur  $[0,1]$ . On pose :  $a_n = \int_0^1 x^n f(x) dx$ , pour tout entier naturel  $n$ . On suppose  $a_n = 0$  pour tout entier naturel  $n$ . On veut montrer que  $f$  est alors identiquement nulle sur  $[0,1]$ . Pour ce faire, on raisonne par l'absurde en supposant  $f$  non nulle.

❶ Montrer qu'il reste un intervalle fermé  $[\alpha, \beta] \subset [0,1]$  sur lequel  $f$  garde un signe constant sans s'annuler.

On supposera dans la suite que  $f$  est strictement positive sur  $[\alpha, \beta]$ .

❷ Montrer qu'il existe un polynôme  $P$  défini sur l'ensemble des nombres réels tel que :

$$\begin{cases} P(x) \geq 0 & \forall x \in [0,1] \\ P(x) > 1 & \forall x \in ]\alpha, \beta[ \\ P(x) < 1 & \forall x \notin [\alpha, \beta] \end{cases}$$

❸ Montrer que ce polynôme vérifie :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) (P(x))^n dx = +\infty$

❹ Montrer directement que :  $\int_0^1 f(x) (P(x))^n dx = 0$  pour tout entier naturel  $n$ . Conclure.

**EXERCICE n° 3**

Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on définit la fonction réelle  $f_n$  par la relation  $f_n(x) = \frac{x^n \sin(nx)}{n}$

❶ Soit  $a \in ]0,1[$  un réel fixé. Montrer que, pour tout entier naturel non nul  $n$ , la fonction  $f_n$  est dérivable et que la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x)$  converge normalement sur l'intervalle  $[-a, a]$ .

② En déduire que la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  converge simplement sur l'intervalle  $] -1,1[$  vers une fonction  $f$  de classe  $C^1$  sur  $] -1,1[$ , et que  $f'$  est la somme de la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x)$

③ Calculer, pour tout  $x \in ] -1,1[$ , la somme de la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x)$

④ En déduire que, pour tout  $x \in ] -1,1[$ ,  $f(x) = \text{Arctan}\left(\frac{x \sin x}{1 - x \cos x}\right)$

#### EXERCICE n° 4

Les deux questions sont indépendantes.  $R$  désigne l'ensemble des nombres réels,  $R_+^*$  celui des nombres réels strictement positifs et  $C^p$  les fonctions continûment dérivables jusqu'à l'ordre  $p$ .

① Soit  $f \in C^2(R_+^*, R)$  telle qu'il existe  $l = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  et que, dans un voisinage à droite de zéro,  $f''(x) \geq -\frac{k}{x^2}$ , où  $k$  est une constante. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0} x f'(x) = 0$

② Soit  $f \in C^5(R, R)$  une fonction impaire vérifiant :

$$(1) f(0) = 0$$

$$(2) \exists M > 0, \forall x \in R, |f^{(5)}(x)| \leq M$$

Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $\left| f(x) - \frac{x}{3} f'(x) \right| \leq \lambda M |x|^5$

Déterminer, la meilleure constante possible  $\lambda$

#### EXERCICE n° 5

Soit  $(x_n)$  une suite réelle monotone telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = l$

① Montrer que la suite  $(x_n)$  est convergente vers  $l$

② Montrer que le résultat n'est plus vrai si la suite n'est pas monotone

**EXERCICE n° 6**

Soit  $f$  une fonction numérique définie sur  $I = ]-1, +\infty[$  par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x} & \text{si } x \in I - Q \\ \frac{p}{p+q+1} & \text{si } x = \frac{p}{q} \in I \cap Q \end{cases}$$

où  $p$  et  $q$  sont premiers entre eux,  $q > 0$ ,  $Q$  désigne l'ensemble des nombres rationnels et  $Q^*$  l'ensemble des nombres rationnels non nuls.

- ❶ Montrer que  $f$  est continue en 0.
- ❷ Etudier la continuité de  $f$  sur  $Q^* \cap I$
- ❸ Etudier la continuité de  $f$  sur  $I - Q$

**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE  
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE**

**ABIDJAN  
AVRIL 2002**

***CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE***

***OPTION MATHEMATIQUES***

**CONTRACTION DE TEXTE**

**DUREE : 3 HEURES**

**Sujet** : Vous résumerez en 150 mots (résumé au 10<sup>ème</sup> environ) le texte suivant de Jean-Marie Domenach sur le terrorisme. N'oubliez pas de préciser le nombre de mots utilisés à la fin de votre copie.

## DU TERRORISME

Le «terrorisme», c'est d'abord la guerre des autres. Le mot a été consacré par le vocabulaire de la propagande : *Terroristen*, ainsi les nazis avaient-ils baptisé les francs-tireurs ; *Terror-Angriff* (attaques de terreur) désignait les bombardements alliés sur les villes allemandes. A l'époque, nous avions pourtant la conviction que la véritable terreur était le fait d'une entreprise totalitaire de domination et d'asservissement plutôt que le fait d'actes isolés – si terrifiants fussent-ils – commis au service de la libération des peuples opprimés. De même, les commandos sionistes, il y a vingt cinq ans, étaient «terroristes» aux yeux des anglais ; de même aujourd'hui, aux yeux des israéliens, les commandos palestiniens... Il est donc nécessaire de se méfier d'un mot lui-même «piégé», et de se rappeler que les actes violents sont moins graves que les états violents, même s'ils sont plus spectaculaires. Une personne qui meurt dans la rue émeut plus que cent personnes qui meurent chez elles.

De grands Etats puissants et respectés, qui ont des sièges aux institutions internationales, font, sous une forme plus ou moins dissimulée, passer la terreur sur de larges parties de leurs populations. Mais, lorsque des groupes dépourvus d'Etats (Irlandais du Nord , Palestiniens, Noirs américains, etc...) en usent d'une manière qui ne peut-être que sporadique et plus ou moins incontrôlée, l'opinion publique est bouleversée et les condamnations pleuvent. A y bien regarder, c'est un paradoxe car l'usage de la terreur par un Etat constitué, reconnu et donc capable de se faire obéir, est beaucoup plus répréhensible que s'il s'agit de groupes irréguliers, plus ou moins clandestins et par là exposés aux risques d'anarchie et de surenchère qui guettent toutes les résistances. Mais la terreur est proscrite par le droit des gens. Les Etats qui la condamnent lorsqu'elle s'exerce à leurs dépens sont souvent mal fondés à en appeler à un droit international qu'ils ne se font pas faute de bafouer (ainsi Israël qui n'a jamais tenu compte des condamnations et recommandations de l'O.N.U.). C'est pourquoi, si l'on ne se résigne pas à la généralisation du terrorisme, qui conduirait à une sorte de jungle sans arbitrage, il faut en appeler à des arguments politiques et moraux ajustés à la pratique du terrorisme lui-même.

Faut-il tenir le langage de l'efficacité ? «Contrairement à l'illusion dangereuse, de plus en plus répandue dans notre société [...] les moyens les plus violents ne sont pas les plus efficaces». Disons plutôt : «ne sont pas toujours les plus efficaces» car il arrive qu'ils le soient : le premier terrorisme du F.L.N. a conduit à l'indépendance de l'Algérie et certains détournements d'avion ont déjà arraché à des dictatures plusieurs centaines de détenus politiques ou d'individus persécutés.

Cependant, si réussies que puissent être de telles actions, elles portent en elles de graves contradictions. Par le système des otages, elles se trouvent en appeler à l'humanité de ceux dont elles dénoncent précisément les pratiques inhumaines. Menées au nom des masses, elles sont exécutées par de petits groupes qui se substituent aux organisations responsables et qui, pour ainsi dire, volent le peuple de son action libératrice et suscitent souvent chez lui, au lieu d'une conscience combative, la gêne et même le dégoût. Menées pour un but politique, elles empruntent leurs méthodes aux criminels de droit commun. Avec raison les marxistes se méfient de ces actions anarchiques, toujours au bord de dégénérer en meurtres irresponsables et inutiles, de ces terroristes fascinés et en quelque sorte damné par leur violence. Malraux en a dessiné il y a longtemps l'inoubliable portrait.

Il faut donc modérer et encadrer le plus possible le terrorisme (La Résistance française était arrivée empiriquement à cette conclusion). Lié à une cause et à un peuple par une organisation responsable, limité dans ses objectifs, le terrorisme peut-être à l'avant-garde, l'appel d'une juste cause. Promu au rang d'une activité prioritaire, il tend à se refermer sur lui-même, à déposséder ses auteurs de leurs justifications et ses partisans de leur responsabilité et de leur vigueur. J'ajoute que l'apologie du terrorisme faite par ceux qui n'en prennent pas les risques est toujours ignoble.

Ces considérations éthiques et politiques ne touchent cependant pas le fond, c'est à dire la situation malsaine et ordinairement dissimulée, que révèle la prolifération actuelle du terrorisme. N'oublions pas que la paix mondiale résulte de «l'équilibre de la terreur» même si elle permet un essor inouï de l'industrie et du commerce. On reproche aux terroristes de tuer des non-combattants, mais qu'est-ce que la dissuasion atomique sinon une permanente menace de mort signifiée à des millions de civils. Or c'est précisément cet équilibre de la terreur, maintenant cimenté par la diplomatie et l'économie, qui autorise les plus grandes puissances à bloquer des évolutions qui, de plus en plus, explosent en terrorisme. Un gigantesque mécanisme, trop lourd pour être secoué et trop complexe pour être révisé, assure la tranquillité du désordre établi. Nous le voyons également fonctionner à une échelle réduite à l'intérieur des Etats où il produit des résultats analogues : le recours à des actes de rupture qui revêtent parfois des formes terroristes.



Allons plus loin. On s'indigne de ce que les terroristes – particulièrement les pirates de l'air – s'en prennent à des «innocents». Or il n'y a plus d'innocents en temps de guerre. Y en a-t-il en temps de paix ? Et de quoi sont donc coupables les enfants qui meurent de faim dans certains pays sous-développés ? Bénéficiaires d'un système qui fonde sur la menace permanente du massacre atomique et sur l'exploitation des pauvres son empire et sa prospérité, nous pouvons difficilement prétendre n'en être pas complices. Il est trop commode lorsque ce système est agressé de se réfugier dans la dénonciation vertueuse et les Israéliens ont raison lorsqu'ils constatent que cette indignation est à la mesure de la peur qu'inflige le terrorisme à des nations qui, jusqu'alors, ne se croyaient pas concernées. Oui, un jour ou l'autre, n'importe lequel d'entre nous peut devenir un otage.

L'esprit du temps travaille à diluer la culpabilité individuelle. Personne ne se veut responsable de rien. Mais alors naît une culpabilité collective bien difficile à cerner, comme on le voit à propos des accidents de la route. Peut-être la diffusion du terrorisme aura-t-elle l'avantage de nous conduire à un examen de conscience sur notre responsabilité solidaire et politique. Ensuite – car il ne faut pas s'arrêter longtemps à l'accusation – nous devrions considérer que le terrorisme dénonce le blocage généralisé des sociétés et des institutions nationales et internationales. L'hypertrophie technique, comme le montre Jacques Berque, se paye de l'immobilisation et de la réduction des autres facteurs du développement humain. Il faut donc s'employer à assouplir et à diversifier les institutions, de sorte qu'elles puissent traduire les évolutions de la base et se plier à la revendication de ces différences qu'exacerbe la civilisation technique.

Si, demain chacun peut devenir une cible pour les tenants d'une cause qu'il méprise ou qu'il ignore, c'est le signe que nul n'échappe désormais à sa responsabilité à l'égard de l'ordre qui meurt et de celui qu'il est urgent de créer. Le terrorisme n'est pas un résidu de barbarie qu'on puisse évacuer à force de discours vertueux et de mesures policières, mais le symptôme d'un détraquement et d'une injustice essentielle, l'annonce de terreurs et de morts plus absurdes, qu'il reste en notre pouvoir d'éviter.

**Jean-Marie Domenach.**

SESSION D' AVRIL 2002

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE  
APPLIQUEE ABIDJAN

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

Les résultats seront encadrés.  $\mathbb{C}$  désigne l'ensemble des nombres complexes.

**Partie I**

La matrice  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , appartenant à  $M_2(\mathbb{C})$ , est hermitienne si et seulement si  $M^* = M$  ( par définition  $M^* = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}$ ). On notera  $\Gamma$  l'ensemble des matrices carrées d' ordre deux à coefficients dans  $\mathbb{C}$  dont le déterminant est égal à 1, et  $\mathcal{S}$  l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans  $\mathbb{C}$  hermitiennes.

1. Prouver que  $\Gamma$ , muni de la multiplication matricielle est un groupe et que  $\mathcal{S}$  est un espace vectoriel réel dont une base, notée  $\mathcal{B}$ , est constituée par les quatre matrices

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

On désignera dans la suite par  $t(S), x(S), y(S), z(S)$  les composantes d'une matrice  $S \in \mathcal{S}$  dans la base  $\mathcal{B}$  :

$$S = t(S)I + x(S)X + y(S)Y + z(S)Z.$$

2. Si  $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , donner l'expression de  $t(S)$  et  $S^{-1}$  en fonction de  $a, b, c, d$ .
3. Quels que soient  $\alpha$  appartenant à  $\Gamma$  et  $S$  appartenant à  $\mathcal{S}$  montrer que  $\alpha S \alpha^*$  appartient à  $\mathcal{S}$ .
4. On note  $T_\alpha$  l'application de  $\mathcal{S}$  dans  $\mathcal{S}$ , définie par  $T_\alpha(S) = \alpha S \alpha^*$ . Montrer que  $T_\alpha$  est un automorphisme de  $\mathcal{S}$ .
5. On se propose d'étudier, pour une matrice  $S \in \mathcal{S}$  fixée, l'équation d'inconnu  $\alpha$  :

$$T_\alpha(S) = I \quad (1)$$

- (a) Montrer que, si l'équation (1) a une solution, les conditions suivantes sont nécessairement satisfaites par  $S$

$$\det(S) = 1, t(S) > 0 \quad (2)$$

- (b) Etablir que, si  $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  est solution de (1), on a :

$$(a \ b)S \begin{pmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \end{pmatrix} = 1, \quad \begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Réciproquement, établir que, si ces deux relations (3) sont vérifiées avec  $\det(S) = 1$ , alors  $\alpha$  est solution de (1).

- (c) On associe à la matrice  $S$  l'application  $Q_S$  de  $\mathbb{C}^2$  dans  $\mathbb{C}^2$ , définie par :

$$Q_S(v) = (m \ n)S \begin{pmatrix} \bar{m} \\ \bar{n} \end{pmatrix} \text{ si } v = (m, n) \in \mathbb{C}^2$$

Montrer que, si  $S$  vérifie les conditions (2), alors pour tout vecteur  $v \in \mathbb{C}^2$  on a  $Q_S(v) \geq 0$ . Montrer que, si  $S$  vérifie les conditions (2), alors si  $v \in \mathbb{C}^2$  et  $Q_S(v) = 0$  on a  $v = 0$ .

- (d) En déduire que l'équation (1) a des solutions si et seulement si  $S$  vérifie les conditions (2).

## Partie II

On définit sur  $\mathcal{S}$  une forme bilinéaire symétrique, notée  $\langle ., . \rangle$  par :

$$\forall S, S' \in \mathcal{S}, \langle S, S' \rangle = t(S)t(S') - x(S)x(S') - y(S)y(S') - z(S)z(S')$$

Dans la suite on dira que  $S$  est un vecteur de genre + (Res. de genre -) si  $S$  vérifie la condition  $\langle S, S \rangle = 1$  (Res.  $\langle S, S \rangle = -1$ ). On dira que  $S$  et  $S'$  sont orthogonaux si  $\langle S, S' \rangle = 0$ .

1. Que représente le nombre  $\langle S, S \rangle$  pour la matrice  $S$ ?
2. Pour tous  $S, S' \in \mathcal{S}$   $\alpha \in \Gamma$  comparer les nombres  $\langle T_\alpha(S), T_\alpha(S') \rangle$  et  $\langle S, S' \rangle$ .
3. Soit  $S_1, S_2, S_3, S_4 \in \mathcal{S}$  deux à deux orthogonaux, et de genre  $+$  ou  $-$ .

(a) Prouver que le carré du déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} t(S_1) & t(S_2) & t(S_3) & t(S_4) \\ x(S_1) & x(S_2) & x(S_3) & x(S_4) \\ y(S_1) & y(S_2) & y(S_3) & y(S_4) \\ z(S_1) & z(S_2) & z(S_3) & z(S_4) \end{vmatrix}$$

est égal à 1.

- (b) Les matrices  $S_1, S_2, S_3, S_4$  sont-elles indépendantes?
- (c) Prouver que l'une au moins de ces matrices est de genre  $+$ .
- (d) Montrer que le déterminant de  $T_\alpha$  a une valeur absolue égale à 1 quel que soit la matrice  $\alpha \in \Gamma$ .
4. Etant donné quatre matrices  $S_1, S_2, S_3, S_4$  de  $\mathcal{S}$  orthogonales deux à deux et de genre de  $+$  ou  $-$ , démontrer qu'il existe une matrice  $\alpha \in \Gamma$  telle que  $T_\alpha$  applique l'un des vecteurs sur  $I$  ou  $-I$  et que, nécessairement, trois des matrices sont de genre  $-$ .
5. On définit une relation  $\mathcal{R}$  entre deux éléments  $\alpha, \alpha' \in \Gamma$  par la condition

$$\alpha \mathcal{R} \alpha' \text{ si et seulement si } \forall t \in \mathbb{R} \quad (1-t)\alpha + t\alpha' \in \Gamma$$

Soit  $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ .

- (a) A quelle condition sur  $\alpha$ , a-t-on  $\alpha \mathcal{R} I$ ?
- (b) Trouver les matrices  $\alpha' = \begin{pmatrix} a & b' \\ c & d' \end{pmatrix}$  satisfaisant  $\alpha \mathcal{R} \alpha'$ .
- (c) Trouver les matrices  $\alpha'' = \begin{pmatrix} a' & b \\ c' & d \end{pmatrix}$  satisfaisant  $\alpha \mathcal{R} \alpha''$ .
- (d) Prouver qu'il existe au moins un couple de matrices  $\alpha', \alpha'' \in \Gamma$  telles que

$$\alpha'' \mathcal{R} I \quad \alpha \mathcal{R} \alpha' \quad \alpha' \mathcal{R} \alpha''.$$

- (e) En déduire que pour toute matrice  $\alpha \in \Gamma$  le déterminant de  $T_\alpha$  vaut 1.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE  
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE  
ABIDJAN

AVRIL 2002

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE  
OPTION MATHEMATIQUES

EPREUVE DE CALCUL NUMERIQUE  
DUREE : 2 HEURES

Calculatrice élémentaire permise.  
Les six exercices sont indépendants.

1. (a) Considérons pour  $0 < p < 1$  la matrice

$$M = \frac{1}{1+p} \begin{pmatrix} 1 & p \\ p & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer  $\lim_{n \rightarrow \infty} M^n$ .

- (b) Une bouteille de vin contient un litre de vin, et une bouteille de bière un litre de bière. On verse une partie de la première dans la seconde. Puis une partie de la seconde dans la première, de sorte qu'à l'issue de cette opération chacune des deux bouteilles contient un litre de mélange. La proportion de bière dans la bouteille de vin est-elle plus petite, égale ou plus grande que la proportion de vin dans la bouteille de bière ?
- (c) On itère  $n$  fois l'opération décrite ci-dessus, en transvasant toujours la même quantité. Calculer la proportion de bière dans chaque bouteille lorsque  $n$  tend vers  $\infty$ .
2. Pour un bateaux le chemin direct entre l'Ile de la Réunion et l'Ile Maurice est de 150 km. Mais à cause de la courbure de la terre le chemin direct pour un sous-marin est plus court. Quelle est la profondeur maximale par laquelle le sous-marin doit passer en prenant ce chemin ? (On supposera dans cet exercice que la terre est un boule parfaite d'une circonférence de 40000 km.)

3. (a) Comment faut-il choisir les fonctions  $a(x)$  et  $b(x)$  pour que les fonctions  $x \mapsto x^2$  et  $x \mapsto x^3$  soient des solutions de l'équation différentielle  $y' = a(x)y + b(x)$  ?
- (b) On considère l'équation différentielle :

$$(*) \quad x(1-x)y' + (3x-2)y = x^3.$$

Déterminer la solution générale de  $(*)$  sur chacun des intervalles  $I_1 = ]-\infty, 0[$ ,  $I_2 = ]0, 1[$  et  $I_3 = ]1, \infty[$ .

- (c) Existe-t-il une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  qui est solution de  $(*)$  et qui vérifie  $f(-1) = f(2) = 0$  ? Si oui, est-elle unique ? (On rappelle que  $C^k$  signifie  $k$  fois continument différentiable.)
- (d) Même question que la précédente, mais avec une fonction de classe  $C^2$  !
4. On considère le système linéaire suivant en les inconnus  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  et les paramètres  $(p, q, r)$  :

$$\begin{aligned} x + y + z - px &= 1, \\ x + y + z - qy &= 0, \\ x + y + z - rz &= 0. \end{aligned}$$

Trouver tous les triplets  $(p, q, r)$  de nombres entiers  $\geq 0$  et  $\leq 2$  tels que l'espace de solutions de ce système est de dimension 1.

5. Est-ce que l'expression

$$\frac{\sin(\pi/n) + \sin(2\pi/n) + \cdots + \sin((n-1)\pi/n)}{n}$$

a une limite lorsque  $n \in \mathbb{N}^*$  tend vers l'infini ? Si oui, la calculer !

6. Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_{-\pi}^{3\pi/2} \sqrt{1 - \cos x} \, dx.$$