

**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN**

AVRIL 2001

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

EXERCICE n° 1

❶ On obtient $\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)^3$. $\lambda = 1$ est donc une valeur propre triple. Le sous espace vectoriel propre associé est une droite engendrée par le vecteur $e_1 = (1, 1, 1)$.

❷ A est semblable à la matrice M telle que : $Ae_1 = e_1$, $Ae_2 = e_1 + e_2$ et $Ae_3 = e_3 + e_2$. On trouve $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, d'où $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $J^3 = 0$. Enfin $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

❸ $A^n = PM^n P^{-1}$ et $M^n = (\Delta + J)^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2$. à savoir

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n(n-1)/2 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ En particulier } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}. \text{ L'expression de } A^n \text{ s'en déduit par la relation précédente.}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{(n-1)(n-2)}{2} & n(2-n) & \frac{n(n-1)}{2} \\ \frac{n(n-1)}{2} & 1-n^2 & \frac{n(n+1)}{2} \\ \frac{n(n+1)}{2} & -n(2+n) & \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{pmatrix}.$$

④ D'autre part, on obtient : $u_n = A^n u_0$ et $u_0 = A u_0$, d'où $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La suite est donc stationnaire.

EXERCICE n° 2

① On vérifie que $A^t A = I$ (matrice unité).

② La matrice A est donc une matrice orthogonale et ses valeurs propres sont de module égal à 1. Comme le polynôme caractéristique est de degré 3 et le déterminant positif, les valeurs propres sont : 1, $e^{i\alpha}$ et $e^{-i\alpha}$. Par ailleurs la trace étant invariante par changement de base, on a :

$$\text{Tr}A = \frac{-1}{3} = 1 + e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}, \text{ d'où } \alpha = \arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$$

EXERCICE n° 3

① Le noyau de f est une droite vectorielle engendrée par le vecteur $(2,1,3)$ et l'image correspond donc au plan.

② Il existe x tel que : $p(u) = x(2,1,3) \in \text{Ker}f$ et la distance entre u et $\text{Ker}f$ est minimale. On a : $d^2(u, \text{Ker}f) = (1-2x)^2 + (1-x)^2 + (1-3x)^2$.

Cette expression est convexe et le minimum est atteint pour $x = \frac{3}{7}$, d'où

$$p(u) = \frac{3}{7}(1,2,3)$$

③ La matrice R de la rotation r est, dans la base canonique :

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ On obtient } r(u) = (-1, 1, 1)$$

④ Soit P la matrice associée à p , on a (le raisonnement est identique

à celui de la deuxième question) : $P = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

On obtient : $P \circ R(u) = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & -6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et

$$R \circ P(u) = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

EXERCICE n° 4

① On vérifie aisément que f est linéaire et que $f(X^{2n}) = -2nX^{2n-1} - 2aX^{2n} \in E$, il en est de même pour tout $p, (p \leq n)$. f est donc un endomorphisme.

② Les valeurs propres sont de la forme $\lambda = -2a \pm 2k$, où $k = 0, 1, \dots, n$. La résolution de l'équation $f(P) = \lambda P$ permet de déterminer les vecteurs propres associés aux valeurs propres précédentes, à savoir : $P(X) = (X-1)^{n+k} (X+1)^{n-k}$. où k varie de $-n$ à $+n$.

③ f est diagonalisable car toutes les valeurs propres sont réelles et distinctes. De plus f est inversible car ses valeurs propres sont non nulles.

④ Les vecteurs propres forment donc une base de E et tout polynôme de E s'écrit comme une combinaison linéaire de ces vecteurs.

EXERCICE n° 5

❶ Dans ce cas, la matrice M est symétrique, donc elle est diagonalisable. D'autre part, $rg(M) = rg(AA') = rg(A) = p$, la matrice M admet donc $n - p$ valeurs propres nulles et M est semblable à la matrice $\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec une

matrice de passage P orthogonale de la forme $P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$.

La matrice M s'écrit : $M = (P_1 \Delta_1^{1/2})(\Delta_1^{1/2} P_1)$, où $\Delta_1^{1/2}$ est la matrice diagonale dont les valeurs de la diagonale correspondent aux racines carrées des valeurs de la diagonale de Δ . Si $B = P_1 \Delta_1^{1/2}$, on a : $AA' = BB'$, d'où $B^{-1}A = B'A'^{-1}$ et $B^{-1}A = Q$ est une matrice orthogonale. On en déduit $A = Q P_1 \Delta_1^{1/2}$.

❷ On vérifie que $AA' + \sigma^2 I_n \geq \sigma^2 I_n$, donc la matrice M est symétrique définie positive et elle est diagonalisable dans le groupe orthogonal (notons P_1 la matrice de passage). Elle est semblable à une matrice Δ diagonale et définie positive. De même, la matrice A s'écrit alors : $A = Q P_1 (\Delta + \sigma^2 I)^{1/2}$.

❸ On a : $M \geq D$. D étant définie positive, il en est de même pour M et cette matrice est inversible. On obtient $M^{-1} = D^{-1}(I + D^{-1}AA')^{-1}$ à partir de la résolution de l'équation : $y = Mx$. On vérifie que $MM^{-1} = I$ (On vérifie que $I + D^{-1}AA'$ est inversible).

EXERCICE 6

❶ On vérifie que $AB - BA$ est une matrice antisymétrique. Notons $C = AB - BA$. C est diagonalisable dans l'ensemble des nombres complexes. Soit λ une valeur propre complexe et u un vecteur propre associé. On a :

$$Cu = \lambda u, \text{ d'où } \bar{u}' Cu = \lambda \bar{u}' u = \lambda \|u\|^2 \text{ et } \bar{u}' C' u = -\lambda \|u\|^2 \quad (i)$$

Par ailleurs, $(Cu)' = (\lambda u)' = u' C' = \lambda u'$ et $\bar{u}' C' = \bar{\lambda} \bar{u}'$. Il vient, en multipliant par u à droite : $\bar{u}' C' u = \bar{\lambda} \|u\|^2 \quad (ii)$.

D'après les résultats précédents (i) et (ii), on trouve $\bar{\lambda} = -\lambda$, les valeurs propres sont donc des imaginaires purs.

② Il existe une base orthonormée pour la forme hermitienne associée à A et orthogonale pour la forme hermitienne associée à B . Soit P la matrice de passage associée à cette base, alors

$A = \overline{P'}P$ et $B = \overline{P'}DP$, où D est une matrice diagonale à coefficients strictement positifs (d_{ii}) . Notons $d = \inf(d_{ii})$. On a :

$$\text{Tr } AB = \text{Tr}(\overline{P'}P\overline{P'}DP) = \text{Tr}(P\overline{P'}P\overline{P'}D) \geq d \text{Tr}(A^2)$$

Si $A = (a_{ij})$, comme A est symétrique, on obtient : $\text{Tr}(A^2) = \sum_{i,k} a_{ik}^2$. $\text{Tr}(A^2) > 0$, car

sinon on aurait $A = 0$, donc $\text{Tr}(AB) > 0$.

③ Supposons que $I + M$ ne soit pas inversible, il existe alors un vecteur u non nul tel que : $(I + M)u = 0$, d'où $Mu = -u$. Par transposition, $u' M' = -u'$ puis $u' M' u = -\|u\|^2$. D'autre part, comme M est antisymétrique $M' u = u$ et $u' M' u = \|u\|^2$. On obtient alors $\|u\|^2 = -\|u\|^2$ et $u = 0$. Ce qui conduit à une contradiction.

La matrice $A = (I - M)(I + M)^{-1}$ existe d'après la question précédente.

A est orthogonale si et seulement si $A' = A^{-1}$. Ce qui est équivalent à : $(I - M)^{-1} M = M (I - M)^{-1}$. Cette relation est obtenue à partir de la relation $(I - M)M = M(I - M)$ en la multipliant à gauche et à droite par $(I - M)^{-1}$. On montre de même que $I - M$ est inversible.

CONCOURS CESD 2001

Corrigé de l'épreuve de Calcul Numérique

1. Les trois vecteurs $(1, 1, 1)$, $(2, 4, 8)$ et $(3, 9, 27)$ sont dans M_1 , donc dans V_1 . Ils sont linéairement indépendants, car

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{pmatrix} = 12 \neq 0.$$

Alors $\dim V_1 \geq 3$, et comme la dimension de V_1 est bornée par celle de $\mathbb{R}^3$ elle vaut 3.

Comme $(n+1, 2n+1, 3n+1) = n(1, 2, 3) + (1, 1, 1)$ on voit que V_2 est engendré par les deux vecteurs linéairement indépendants $(1, 2, 3)$ et $(1, 1, 1)$. Par conséquent $\dim V_2 = 2$.

2. Soit a le remboursement annuel, c le montant du crédit et p le taux d'intérêt. Après le premier remboursement le montant restant du crédit est

$$(1+p)c - a.$$

Après le deuxième remboursement le montant restant du crédit est

$$(1+p)((1+p)c - a) - a.$$

En général, après le n -ième remboursement, $n = 0, \dots, 5$ le montant restant est

$$(1+p)^n c - ((1+p)^{n-1} + (1+p)^{n-2} + \dots + 1)a = (1+p)^n c - \frac{(1+p)^n - 1}{p} a.$$

Pour $n = 5$ ce montant doit être nul, car le prêt dure 5 ans. Alors

$$a = \frac{p(1+p)^5}{(1+p)^5 - 1} c = \frac{0,04(1,04)^5}{(1,04)^5 - 1} \times 100\,000\text{FF} = 22\,462,71\text{FF}.$$

3. (a) Montrons d'abord que $a_{n+1}^2 \geq c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet,

$$a_n^4 + c^2 - 2a_n^2c = (a_n^2 - c)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow a_n^4 + c^2 + 2a_n^2c \geq 4a_n^2c$$

$$\Rightarrow a_{n+1}^2 = \frac{a_n^2}{4} + \frac{c^2}{4a_n^2} + \frac{c}{2} \geq c.$$

Maintenant montrons que $a_{n+1} \leq a_n$ pour tout $n \geq 1$. On a

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{c}{2a_n} \leq \frac{a_n}{2} + \frac{a_n^2}{2a_n} = a_n.$$

Donc la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est bornée et décroissante. Comme $\mathbb{R}$ est complet elle doit alors converger vers une limite a dans $\mathbb{R}$.

- (b) De $a = \lim a_n = \lim a_{n+1}$ et de la définition récurrente on déduit $a = \frac{a}{2} + \frac{c}{2a}$, et de là $a^2 = c$. Comme $a \geq 0$ on a $a = \sqrt{c}$.
4. (a) L'ensemble D est le triangle fermé entre les points $(0, 0)$, $(0, \pi)$ et $(\pi, 0)$.
- (b) La fonction f s'anule sur le bord ∂D du triangle D , et elle est strictement positive sur l'intérieur D° . Donc tous les points sur ∂D sont des minima (globaux) et il n'y en a pas d'autres.
- (c) La fonction f est de la classe C^∞ car ses composantes le sont. Tous les extrema $(x, y) \in D^\circ$ vérifient alors

$$\partial_x f(x, y) = \partial_y f(x, y) = 0.$$

Ceci donne

$$\cos x \sin y \sin(x + y) + \sin x \sin y \cos(x + y) = 0,$$

$$\sin x \cos y \sin(x + y) + \sin x \sin y \cos(x + y) = 0.$$

Sur l'intérieur D° nous avons $\sin x \neq 0 \neq \sin y$, d'où

$$\cos x \sin(x + y) = -\sin x \cos(x + y), \quad \cos y \sin(x + y) = -\sin y \cos(x + y).$$

De la première équation nous tirons que $\cos(x + y) \neq 0 \neq \cos x$, et de la deuxième que $\cos y \neq 0$. Donc par division

$$\frac{\cos x}{\cos y} = \frac{\sin x}{\sin y}.$$

D'où $\tan x = \tan y$, et enfin $x = y$. La première équation donne alors

$$\cos x \sin(2x) + \sin x \cos(2x) = 0,$$

donc $\sin(3x) = 0$. Alors $x = \frac{\pi}{3}$. Par conséquent seul le point $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ peut annuler $\partial_x f$ et $\partial_y f$ — et il le fait (vérification facile).

Maintenant $(a, b) = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ est l'unique maximum de f . En effet la fonction f continue admet un maximum sur le compact D et $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ est l'unique candidat.

On a $f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) = 3\sqrt{3}/8$.

(d) La série de Taylor jusqu'à l'ordre 2 est

$$\begin{aligned} T_2 &= f(a, b) + (\partial_x f(a, b), \partial_y f(a, b)) \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} \\ &\quad + (x - a, y - b) \begin{pmatrix} \partial_x^2 f(a, b) & \partial_x \partial_y f(a, b) \\ \partial_y \partial_x f(a, b) & \partial_y^2 f(a, b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} \\ &= 3\frac{\sqrt{3}}{8} + (x - \frac{\pi}{3}, y - \frac{\pi}{3}) \begin{pmatrix} \partial_x^2 f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) & \partial_x \partial_y f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) \\ \partial_y \partial_x f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) & \partial_y^2 f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \frac{\pi}{3} \\ y - \frac{\pi}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \partial_x^2 f &= 2 \cos x \sin y \cos(x + y) - 2 \sin x \sin y \sin(x + y), \\ \partial_y^2 f &= 2 \sin x \cos y \cos(x + y) - 2 \sin x \sin y \sin(x + y), \\ \partial_x \partial_y f &= \cos x \cos y \sin(x + y) + \cos x \sin y \cos(x + y) \\ &\quad + \sin x \cos y \cos(x + y) - \sin x \sin y \sin(x + y). \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} T_2 &= 3\sqrt{3}/8 - (x - \frac{\pi}{3}, y - \frac{\pi}{3}) \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \frac{\pi}{3} \\ y - \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \\ &= 3\sqrt{3}/8 - (x - \frac{\pi}{3}, y - \frac{\pi}{3}) \begin{pmatrix} \sqrt{3}(x - \frac{\pi}{3}) + \sqrt{3}/2(y - \frac{\pi}{3}) \\ \sqrt{3}/2(x - \frac{\pi}{3}) + \sqrt{3}(y - \frac{\pi}{3}) \end{pmatrix} \\ &= 3\sqrt{3}/8 - \sqrt{3}((x - \frac{\pi}{3})^2 + (x - \frac{\pi}{3})(y - \frac{\pi}{3}) + (y - \frac{\pi}{3})^2). \end{aligned}$$

5. Avec la substitution $t = \tan x$ on a $dt = dx / \cos^2 x$. Alors

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{dx}{\tan x \cos^2 x} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| = \ln |\tan x|.$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin x \cos x} &= \ln \tan(\pi/3) - \ln \tan(\pi/6) \\ &= \ln \sqrt{3} - \ln \frac{1}{\sqrt{3}} = \ln 3. \end{aligned}$$

6. (a)

$$\begin{aligned} \text{On a } \sum_{k \geq 2}^n \frac{1}{k(k^2 - 1)} &= \sum_{k \geq 2}^n \left(\frac{1}{2(k-1)} + \frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{k} \right) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

ce qui converge vers $\frac{1}{4}$ quand $n \rightarrow \infty$.

(b) D'après de l'Hôpital on a

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{\ln x}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{\frac{1}{x}}{1}} = e.$$

7. On a $V = \pi r^2 h$ et $S = 2\pi r(r + h)$. Comme V est constant on peut remplacer $h = \frac{V}{\pi r^2}$ dans l'expression pour S :

$$\begin{aligned} S(r) &= 2\pi r \left(r + \frac{V}{\pi r^2} \right) = 2\pi r^2 + 2\frac{V}{r}, r > 0, \\ S'(r) &= 4\pi r - 2\frac{V}{r}. \end{aligned}$$

Comme $\lim_{r \rightarrow 0^+} S(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} S(r) = \infty$, on sait que S possède un minimum. De $S'(r) = 0$ on tire $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, et de là $h = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE
APPLIQUEE ABIDJAN

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

PROBLEME I

1. (a) Le nombre $\sup_{x \in X} h_m(x)$ est un majorant des nombres $mx - f(x)$ lorsque $x \in X$. Donc :

$$\forall m \in X^\circ, \forall x \in X, f^\circ(m) \geq mx - f(x)$$

Ainsi on a :

$$\forall m \in X^\circ, \forall x \in X, f^\circ(m) + f(x) \geq mx$$

Fixons $x \in X$ alors on a :

$$\forall m \in X^\circ, f(x) \geq mx - f^\circ(m)$$

$f(x)$ est un majorant des valeurs $mx - f^\circ(m)$ lorsque $m \in X^\circ$. Donc

$$f(x) \geq \sup_{m \in X^\circ} mx - f^\circ(m)$$

- (b) Soit $m_1 \in X^\circ$ et $m_2 \in X^\circ$ alors

$$\exists M_1 \in \mathbb{R}, \forall x \in X, m_1x - f(x) \leq M_1$$

$$\exists M_2 \in \mathbb{R}, \forall x \in X, m_2x - f(x) \leq M_2$$

Soit $\lambda \in [0, 1]$ en posant $M = \lambda M_1 + (1 - \lambda)M_2$ on obtient

$$\forall x \in X, (\lambda m_1 + (1 - \lambda)m_2)x - f(x) \leq M$$

Donc $\lambda m_1 + (1 - \lambda)m_2 \in X^\circ$

- (c) Soit $m \in \mathbb{R}$. X est un compact, la fonction h_m est continue sur X donc h_m est bornée et atteint ses bornes. En particulier $X^\circ = \mathbb{R}$ et

$$\exists x_0 \in X, h_m(x_0) = \sup_X (mx - f(x))$$

$$\exists x_0 \in X, f^\circ(m) = mx_0 - f(x_0)$$

2. (a) $h_m(x) = mx - e^x$ et $h'_m(x) = m - e^x$.

- Si $m < 0$, la fonction h_m est décroissante sur $\mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} h_m(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} h_m(x) = -\infty$. Donc $m \notin X^\circ$.
- Si $m = 0$, la fonction h_m est décroissante sur $\mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} h_m(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} h_m(x) = -\infty$ donc $m \in X^\circ$ et $f^\circ(0) = 0$.
- Si $m > 0$, la fonction h_m est croissante sur $]-\infty, \ln m]$ et décroissante sur $[\ln m, \infty[$ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h_m(x) = -\infty$ donc $m \in X^\circ$ et $f^\circ(m) = m \ln m - m$.

En résumé $X^\circ = \mathbb{R}^+$.

Notons $H_m(x) = mx - f^\circ(x)$. On a $H_m(0) = 0$ et si $x > 0$, $H_m(x) = (m+1)x - x \ln x$. Sur $\mathbb{R}^{+\star}$, $H'_m(x) = m - \ln x$. Donc H_m est croissante sur $]0, e^m]$ décroissante sur $[e^m, \infty[$. Elle atteint son maximum en $x = e^m$ et $H_m(e^m) = e^m$. Ainsi

$$\begin{aligned} X^\circ &= \mathbb{R}^+ & f^\circ(0) &= 0 \text{ si } x > 0 & f^\circ(x) &= x(\ln x - 1) \\ X^{\circ\circ} &= \mathbb{R} & f^{\circ\circ}(x) &= e^x \end{aligned}$$

- (b) $h_m(x) = mx - \frac{x^3}{3}$. $\lim_{x \rightarrow -\infty} h_m(x) = \infty$ donc $X^\circ = \emptyset$

- (c) $h_m(x) = (m - \alpha)x + \beta$

- Si $m \neq \alpha$, h_m est non bornée et $m \notin X^\circ$
- Si $m = \alpha$, h_m est constante et vaut β .

Finalement $X^\circ = \{\alpha\}$ et $f^\circ(\alpha) = \beta$. $H_m(x) = mx - f^\circ(x)$ est une fonction bornée et $\sup_{x=\alpha} (mx - f^\circ(x)) = m\alpha - \beta$ Donc $X^{\circ\circ} = \mathbb{R}$ et $f^{\circ\circ}(x) = \alpha x - \beta$.

- (d) $h_m(x) = mx - f(x)$. L'image de h_m est $h_m(\{-1, 0, 1, 2\}) = \{-m - 1, 0, m - 2, 2m - 1\}$. Cet ensemble est toujours majoré, on trouve $X^\circ = \mathbb{R}$

$$f^\circ(m) = \begin{cases} -m - 1 & \text{si } m \leq -1 \\ 0 & \text{si } -1 \leq m \leq \frac{1}{2} \\ 2m - 1 & \text{si } m \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

En calculant $H_m(x) = mx - f^\circ(x)$ on trouve

$$H_m(x) = \begin{cases} (m+1)x + 1 & \text{si } x \leq -1 \\ mx & \text{si } -1 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ (m-2)x + 1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \end{cases}$$

Finalement H_m est majoré si et seulement si $m \in [-1, 2]$ $X^{\circ\circ} = [-1, 2]$ et $f^{\circ\circ}(x) = -x$ si $x \in [-1, 0]$ et $f^{\circ\circ}(x) = \frac{x}{2}$ si $x \in [0, 2]$

3. (a) Si $(X, f) \leq (Y, g)$ et $(Y, g) \leq (Z, h)$ alors $Z \subset X$ et $\forall x \in Z, f(x) \leq h(x)$ donc $(X, f) \leq (Z, h)$.
Si $(X, f) \leq (Y, g)$ et $(Y, g) \leq (X, f)$ alors $X = Y$ et $\forall x \in X, f(x) = g(x)$ donc $(X, f) = (Y, g)$.
- (b) On suppose que $Y \subset X, \forall x \in Y, f(x) \leq g(x)$ et que X° est non vide. Soit $m \in X^\circ$ il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in X, mx - f(x) \leq M$. Donc $\forall x \in Y, mx - g(x) \leq M$. Donc $m \in Y^\circ$. On a montré que $X^\circ \subset Y^\circ$. Pour $m \in X^\circ, \forall x \in Y, mx - g(x) \leq mx - f(x)$. Pour $m \in X^\circ$

$$\sup_{x \in Y} mx - g(x) \leq \sup_{x \in Y} mx - f(x) \leq \sup_{x \in X} mx - f(x)$$

Donc $g^\circ(m) \leq f^\circ(m)$.

- (c) On a l'équivalence de propositions suivantes :

$$(\mathbb{R}, \phi_{m,p}) \leq (X, f)$$

$$X \subset \mathbb{R}, \forall x \in X, \phi_{m,p}(x) \leq f(x)$$

$$\forall x \in X, \phi_{m,p}(x) \leq f(x)$$

$$\forall x \in X, mx - f(x) \leq p$$

$$m \in X^\circ \text{ et } f^\circ(m) \leq p$$

On a montré que $(\mathbb{R}, \phi_{m,p}) \leq (X, f)$ si et seulement si $m \in X^\circ$ et $p \geq f^\circ(m)$.

Soit $m \in X^\circ$ si $f^\circ(m) \leq p$ alors $\varphi(x) \geq \phi_{m,p}(x)$ En utilisant le résultat au dessus on obtient que si

$m \in X^\circ$ et $(\mathbb{R}, \phi_{m,p}) \leq (X, f)$ alors $(\mathbb{R}, \phi_{m,p}) \leq (\mathbb{R}, \varphi)$. La droite d'équation $y = \varphi(x)$ est la droite au dessous de f la plus proche de f et de pente m .

4. (a) D'après la question 1)(a) soit $x \in X \forall m \in X^\circ, xm - f^\circ(m) \leq f(x)$ Cela démontre que la fonction $H_x(m) = xm - f^\circ(m)$ pour $x \in X$ est bornée par $f(x)$ sur l'ensemble X° . Donc $X \subset X^{\circ\circ}$ et $f^{\circ\circ}(x) \leq f(x)$. Soit encore $(X^{\circ\circ}, f^{\circ\circ}) \leq (X, f)$.

(b) D'après la question 3)(b) et la question précédente

$$(X^{\circ\circ\circ}, f^{\circ\circ\circ}) \geq (X^{\circ}, f^{\circ}).$$

Par ailleurs la question précédente appliquée à la fonction f° prouve que :

$$(X^{\circ\circ\circ}, f^{\circ\circ\circ}) \leq (X^{\circ}, f^{\circ}).$$

En utilisant la question 3)(a) on conclut que

$$(X^{\circ\circ\circ}, f^{\circ\circ\circ}) = (X^{\circ}, f^{\circ}).$$

(c) D'après la question 1)(c) $X^{\circ} = \mathbb{R}$. Une droite passant par les points $A = (-a, f(-a))$ et $A' = (a', f(a'))$ ($a' \neq -a$) a pour pente $\frac{f(a') - f(-a)}{a' + a}$. Cette droite est tangente en A' si la pente de cette droite est la dérivée de f au point a' . A' est solution du problème si et seulement si

$$\frac{a'^3 + a^3}{a' + a} = 3a'^2,$$

soit si a' est solution de $2(a' - \frac{a}{2})(a' - \frac{a}{2})(a' + a) = 0$ et $a' \neq a$, donc $a' = \frac{a}{2}$. Le point A' a pour coordonnées $(\frac{a}{2}, \frac{a^3}{24})$

PROBLEME II

1. (a) $y_n(-x) = \cos(n \arccos(-x)) = \cos(n(\pi - \arccos x)) = (-1)^n \cos(n \arccos x)$
 y_n est de la même parité que n . $z_n(-x) = \sin(n \arccos(-x)) = (-1)^{n+1} \sin(n \arccos x)$, z_n est de même parité que $n - 1$.

$$y_n(0) = \cos(n \frac{\pi}{2}).$$

Si n est impair, $y_n(0) = 0$. Si n est pair, $y_n(0) = (-1)^{\frac{n}{2}}$. $z_n(0) = \sin(n \frac{\pi}{2})$.

Si n est pair $z_n(0) = 0$, si n est impair $z_n(0) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$.

$$y_n(1) = 1 \text{ et } z_n(1) = 0$$

- (b) Les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction $\arccos$ est dérivable sur $] -1, 1[$, donc les fonctions y_n et z_n sont dérivables sur $] -1, 1[$.

$$y'_n(x) = n \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sin(n \arccos x) = \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} z_n(x)$$

$$z'_n(x) = -n \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cos(n \arccos x) = -\frac{n}{\sqrt{1-x^2}} y_n(x)$$

- (c) Rappelons les équivalences :

$$(\cos x - 1) \sim_0 \frac{-x^2}{2}$$

$$\sin x \sim_0 x$$

Elles impliquent :

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos(n\theta) - 1}{\cos \theta - 1} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{n^2 \theta^2}{\theta^2} = n^2$$

Et comme la limite de la quantité $\frac{n\theta}{\theta^2}$ lorsque $\theta \rightarrow 0$ n'existe pas, la limite lorsque $\theta \rightarrow 0$ de $\frac{\sin(n\theta)}{\cos \theta - 1}$ n'existe pas. En posant $\theta = \arccos(x)$ on obtient

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(n \arccos x) - 1}{x - 1} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos(n\theta) - 1}{\cos \theta - 1} = n^2$$

La fonction y_n est dérivable en 1 de nombre dérivée n^2 . La fonction y_n étant de même parité que n , y_n est dérivable en -1 de dérivée $(-1)^{n-1} n^2$. En posant $\theta = \arccos(x)$ on obtient que la fonction z_n n'est pas dérivable en 1. La fonction z_n étant de même parité que $n - 1$, z_n n'est pas dérivable en -1 .

(d) L'équation $y_n(x) = 0$ est équivalente à $n \arccos x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ où encore

$$\arccos x \in \left\{ \frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}, k \in \mathbb{N} \right\}$$

$\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}$ appartient à $[0, \frac{\pi}{2}]$ si et seulement si $k \in \{0, \dots, E(\frac{n-1}{2})\}$ Les solutions appartenant à $[0, 1]$ sont :

$$\{y_k = \cos(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}), k \in \{0, \dots, E(\frac{n-1}{2})\}\}.$$

$z_n(x) = 0$ est équivalente à $n \arccos x = k\pi$ où encore à

$$\arccos x \in \{k\frac{\pi}{n}, k \in \mathbb{N}\}$$

$k\frac{\pi}{n}$ appartient à $[0, \frac{\pi}{2}]$ si et seulement si $k \in \{0, \dots, E(\frac{n}{2})\}$ Les solutions appartenant à $[0, 1]$ sont

$$\{z_k = \cos(k\frac{\pi}{n}), k \in \{0, \dots, E(\frac{n}{2})\}\}.$$

L'inéquation $y_n(x) \geq 0$ est équivalente à

$$n \arccos x \in (\cup_{k \in \mathbb{N}} [-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]) \cap [0, \pi]$$

- si n est pair, $y_n(x) \geq 0$ est équivalent à

$$\arccos x \in [0, \frac{\pi}{2n}] \cup_{k=1}^{k=E(\frac{n-1}{2})} [-\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}, \frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}] \cup [-\frac{\pi}{2n} + \pi, \pi]$$

- si n est impair, $y_n(x) \geq 0$ est équivalente à

$$\arccos x \in [0, \frac{\pi}{2n}] \cup_{k=1}^{k=E(\frac{n-1}{2})} [-\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}, \frac{\pi}{2n} + \frac{2\pi}{n}]$$

La fonction $\arccos$ est décroissante. A_n est l'ensemble :

- pour n pair

$$[\cos(\pi), \cos(-\frac{\pi}{2n} + \pi)] \cup_{k=1}^{k=E(\frac{n-1}{2})} [\cos(\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}), \cos(-\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n})] \cup [\cos(\frac{\pi}{2n}), \cos(0)]$$

- pour n impair

$$\cup_{k=1}^{k=E(\frac{n-1}{2})} [\cos(\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}), \cos(-\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n})] \cup [\cos(\frac{\pi}{2n}), \cos(0)]$$

L'inéquation $z_n(x) \geq 0$ est équivalent à $n \arccos x \in \cup_{k \in \mathbb{N}} [0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi] \cap [0, \pi]$

$$\arccos x \in \cup_{k=1}^{k=E(\frac{n-1}{2})} [\frac{2k\pi}{n}, \frac{(2k+1)\pi}{n}]$$

La fonction $\arccos$ est décroissante. B_n est l'ensemble

$$\cup_{k=1}^{k=E(\frac{n-1}{2})} [\cos(\frac{\pi}{n} + \frac{2k}{\pi}), \cos(\frac{2k}{\pi})]$$

Le signe de $y'_n(x)$ est le même que de celui de $z_n(x)$. y_n est croissante sur A_n , décroissante ailleurs. Le signe de $z'_n(x)$ est l'opposé de celui de $y_n(x)$. z_n est décroissante sur B_n , croissante ailleurs.

2. (a) $y_0(x) = 1$ $z_0(x) = 0$ $y_1(x) = x$ et $z_1(x) = \sqrt{1-x^2}$

(b)

$$\begin{aligned} y_{n+2}(x) + y_n(x) &= 2 \cos((n+2) \arccos x) + \cos(n \arccos x) \\ &= \cos((n+1) \arccos x) \cos(\arccos x). \end{aligned}$$

$$y_{n+2}(x) + y_n(x) = 2xy_{n+1}(x).$$

$$\text{De même on trouve } z_{n+2}(x) + z_n(x) = 2xz_{n+1}(x)$$

(c) Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}_n$: y_n est une fonction polynôme de degré n et $z_n(x)$ peut s'exprimer sous la forme :

$$z_n(x) = \sqrt{1-x^2} g_n(x)$$

où g_n est une fonction polynôme de degré $n-1$. Les propositions $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vraies. Si on suppose $n \geq 1$ et les propositions $\mathcal{P}_k$ vraie pour tout $k \leq n$ alors $y_{n+1} = 2xy_n - y_{n-1}$, ainsi y_{n+1} est un polynôme de degré $n+1$. $z_{n+1} = 2xz_n - z_{n-1} = (2xg_n(x) - g_{n-1}(x))\sqrt{1-x^2}$ donc $g_{n+1} = 2xg_n(x) - g_{n-1}(x)$ est un polynôme de degré n .

(d) Les formules de Moivre sont

$$\cos(n\theta) + i \sin(n\theta) = \sum_{k=0}^{k=n} (i)^k C_n^k \cos^{n-k}(\theta) \sin^k(\theta)$$

$$\cos(n\theta) = \sum_{k=0}^{k=E(\frac{n}{2})} (-1)^k C_n^{2k} \cos^{n-2k}(\theta) \sin^{2k}(\theta)$$

$$\sin(n\theta) = \sum_{k=1}^{k=E(\frac{n-1}{2})} (-1)^k C_n^{2k+1} \cos^{n-2k-1}(\theta) \sin^{2k+1}(\theta)$$

On obtient alors

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{k=E(\frac{n}{2})} (-1)^k C_n^{2k} x^{n-2k} (1-x^2)^{2k}$$

$$z_n(x) = \sum_{k=1}^{k=E(\frac{n-1}{2})} (-1)^k C_n^{2k+1} x^{n-2k-1} (1-x^2)^{2k+1}$$

(e) Les fonctions à valeurs réelles solutions de l'équation différentielle

$$\frac{d^2v}{d\theta^2} + n^2v = 0$$

sont l'ensemble des fonctions $v(\theta) = \alpha \cos(n\theta) + \beta \sin(n\theta)$ lorsque $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Maintenant on pose $\arccos x = \theta$. $f(x) = f(\cos \theta)$
 $\frac{d}{d\theta}(f \circ \cos)(\theta) = -\sin(\theta)f'(\cos \theta)$ $\frac{d^2}{d\theta^2}(f \circ \cos)(\theta) = -\cos(\theta)f'(\cos \theta) + \sin^2(\theta)f''(\cos \theta)$ Une fonction $f(x)$ est solution de

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2y = 0$$

si et seulement si $f(\cos \theta)$ est solution de :

$$\frac{d^2v}{d\theta^2} + n^2v = 0$$

On déduit que y_n et z_n sont deux solutions sur $] -1, 1[$ de l'équation différentielle :

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2y = 0$$

Les solutions générales sur $] -1, 1[$ de l'équation différentielle sont les fonctions $f(x) = \alpha y_n(x) + \beta z_n(x)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

3. (a) Soit $y_1 \in \mathcal{C}^\infty] -1, 1[$, $y_2 \in \mathcal{C}^\infty] -1, 1[$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ alors

$$F(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha F(y_1) + \beta F(y_2).$$

F est une application linéaire.

Si $y \in \mathcal{C}^\infty] -1, 1[$ alors $F(y) \in \mathcal{C}^\infty] -1, 1[$, F est un endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty] -1, 1[$.

(b) La fonction $y = 0$ est solution de $f(x, y(x), y'(x)) = 0$ Soit y une solution de l'équation différentielle $f(x, y(x), y'(x)) = 0$ qui s'annule en un point noté $x_0 \in] -1, 1[$ alors $y(x_0) = 0$ et $y'(x_0) = 0$. D'après l'unicité de la solution du problème de Cauchy pour les équations différentielles alors $y = 0$. Donc si y est une solution non nulle de

$f(x, y(x), y'(x)) = 0$, elle ne s'annule jamais sur l'intervalle $] -1, 1[$.
Elle vérifie :

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{-2x}{1-x^2}$$

Il existe $C \in \mathbb{R}^{+*}$ telle que $y(x) = C(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}$. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $f(x, y(x), y'(x)) = 0$ est

$$\{y(x) = C(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}, C \in \mathbb{R}^+\}.$$

$u \in \text{Ker}(F)$ et $u(0) = 1$ est équivalent à $u(x) = (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}$.

(c)

$$Y(x) = (1-x^2)y'(x) + (2x-1)xy(x)$$

En dérivant on obtient

$$Y^{(k)}(x) = \sum_{p=0}^{p=k} C_k^p (1-x^2)^{(p)} y^{(k-p+1)}(x) + \sum_{p=0}^{p=k} C_k^p (2n-1)x^{(p)} y^{(k-p)}(x)$$

$$Y^{(k)}(x) = ((2n-1)x-2kx)y^{(k)}(x) + (1-x^2)y^{(k+1)}(x) + (k(2n-1)-k(k-1))y^{(k-1)}(x)$$

Cette relation pour u donne :

$$(1-x^2)u^{(k+1)}(x) = -((2n-1)x-2kx)u^{(k)}(x) - (k(2n-1)-k(k-1))u^{(k-1)}(x)$$

En particulier pour $x = 0$:

$$u^{(k+1)}(0) = -k(2n-k)u^{(k-1)}(0).$$

$u(0) = 1$ $u'(0) = 0$, une récurrence prouve :

$$u^{(2p)}(0) = (-1)^p 1 \times 3 \times 5 \cdots \times (2p-1)(2n-1)(2n-3) \cdots (2n-2p+1)$$

$$u^{(2p-1)}(0) = 0, u^{(2n)}(0) = (-1)^n ((2n-1)!)^2.$$

- (d) Utilisons la méthode de variation des constantes. Soit y une solution posons $y(x) = c(x)u(x)$ où $c(x)$ est la nouvelle inconnue. $c(x)$ est solution de l'équation

$$(1-x^2)c'(x) = \lambda c(x).$$

Si c n'est pas la fonction nulle alors

$$\frac{c'(x)}{c(x)} = \frac{\lambda}{1-x^2}$$

L'expression de c est : $c(x) = D\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{\lambda}{2}}$ avec $D \in \mathbb{R}^{+*}$. En ajoutant la solution nulle on trouve que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $f(x, y, y') = \lambda y$ est :

$$\{y(x) = D\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{\lambda}{2}}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}, D \in \mathbb{R}^+\}$$

$$\{y(x) = D(1+x)^{\frac{\lambda}{2}+n-\frac{1}{2}}(1-x)^{n-\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{2}}, D \in \mathbb{R}^+\}$$

Les solutions sont des fonctions polynômes si et seulement si $\frac{\lambda}{2}+n-\frac{1}{2} \in \mathbb{N}$ et $n-\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{2} \in \mathbb{N}$. Donc si on pose $\lambda = 2p-1$, il existe des solutions polynômes si et seulement si $p \in \mathbb{Z}$ et $-n+1 \leq p \leq n$. La solution, valant 1 en 0, est le polynôme $P_\lambda(x) = (1+x)^{n+p}(1-x)^{n-p}$.