

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE
OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

EXERCICE n° 1

Il est clair que 1 et 2 sont des valeurs propres de multiplicité 2 (la matrice est triangulaire). Si on note E_1 (respectivement E_2) le sous-espace vectoriel propre associé à 1 (resp. 2), A est diagonalisable si et seulement si $\dim E_1 = 2$ et $\dim E_2 = 2$.

$$u = (x, y, z, t) \in E_1 \Leftrightarrow Au = u \Leftrightarrow \begin{cases} ax = 0 \\ bx + cy + z = 0 \\ bx + cy + dz + t = 0 \end{cases}$$

et $\dim E_1 = 2$ si et seulement si $a=0$.

De même $\dim E_2 = 2$, si et seulement si $d=0$.

En conclusion la matrice est diagonalisable si et seulement si $a=d=0$.

EXERCICE n° 2

① $\langle f^2(x), y \rangle = \langle f(f(x)), y \rangle = -\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, f^2(y) \rangle$, et l'application f^2 est symétrique.

$\langle f(x), x \rangle = -\langle x, f(x) \rangle$, d'où $2\langle f(x), x \rangle = 0$ et $\langle f(x), x \rangle = 0$

$\langle f^2(x), x \rangle = -\langle f(x), f(x) \rangle = -\|f(x)\|^2 \leq 0$

② Soit λ une valeur propre de f^2 , il existe alors u , non nul, tel que $f^2(u) = \lambda u$. On a $\langle f^2(u), u \rangle = \lambda \|u\|^2 \leq 0$, donc $\lambda \leq 0$.

③ Soit (e_i) une base orthonormale, $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker). Notons, $\forall i$, $f(e_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j$. On a :

$$\langle f(e_i), e_j \rangle = \langle \sum_{k=1}^n a_{ik} e_k, e_j \rangle = a_{ij} \text{ et } \langle f(e_i), e_j \rangle = - \langle e_i, f(e_j) \rangle = - \langle e_i, \sum_{k=1}^n a_{jk} e_k \rangle = -a_{ji}$$

En conclusion $a_{ij} = -a_{ji}$; la matrice est antisymétrique.

④ Soit M la matrice associée à f , on a :

$$Q(u^2) = \det(M^2 - u^2 I) = \det(M - uI) \times \det(M + uI) = \det(M - uI) \times (-1)^n \det(-M - uI)$$

et comme M est antisymétrique,

$$Q(u^2) = \det(M - uI) \times (-1)^n \det(M' - uI) = \det(M - uI) \times (-1)^n \det(M - uI)'$$

$$Q(u^2) = (-1)^n \det(M - uI) \times \det(M - uI) = (-1)^n (P(u))^2$$

⑤ Si λ est une racine de P dans C (existence assurée par le théorème de Cayley-Hamilton), λ^2 est une racine de Q (④) et λ^2 est négative (②), donc λ est un imaginaire pur.

EXERCICE n° 3

① La matrice Ω est orthogonale si les vecteurs colonnes sont deux à deux orthogonaux et unitaires, à savoir :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \text{ et } ab + bc + ca = 0$$

et si :

Les deux conditions $\begin{cases} \det \Omega = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = a + b + c = 1 \\ a + b + c = 1 \\ ab + bc + ca = 0 \end{cases}$ entraînent les conditions précédentes et sont

suffisantes pour obtenir la propriété. Elles montrent que a, b, c doivent être solutions d'une équation de la forme : $t^3 - t^2 + k = 0$ dont les racines doivent être toutes réelles. En examinant les extrema locaux de cette fonction $t^3 - t^2 + k$, à l'aide du tableau de

variation, on obtient : $0 \leq k \leq \frac{4}{27}$.

② Soit $k = \frac{4}{27} \sin^2 \varphi$, où $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ et faisons dans l'équation le changement de variable $t = \frac{1}{3} + \lambda \cos \alpha$, on obtient :

$$\lambda^3 \cos^3 \alpha - \frac{\lambda}{3} \cos \alpha = \frac{2}{27} (1 - 2 \sin^2 \varphi) = \frac{2}{27} \cos 2\varphi$$

Rappelons que $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$ et pour $\lambda = \frac{2}{3}$ l'équation devient,

$$\frac{2}{27} (4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha) = \frac{2}{27} \cos 2\varphi \text{ ou } \cos 3\alpha = \cos 2\varphi; \text{ On obtient alors : } \alpha = \pm \left(\frac{2}{3} \varphi + \frac{2n\pi}{3} \right)$$

A une permutation près, on a :

$$a = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cos \frac{2\varphi}{3}, \quad b = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cos \frac{2\varphi + 2\pi}{3}, \quad c = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cos \frac{2\varphi - 2\pi}{3}$$

L'axe de la rotation est le vecteur propre pour la valeur propre 1, en remarquant que $a + b + c = 1$, on trouve comme vecteur directeur unitaire : $\delta = \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, 1)$

Si ω est l'angle de la rotation ($0 \leq \omega \leq 2\pi$), la matrice est semblable à

$$\Delta = \begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où $2 \cos \omega + 1 = \text{Tr} \Delta = 3a = 1 + 2 \cos \frac{2\varphi}{3}$ et en considérant en outre le transformé de

$u = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, -1, 0)$, orthogonal à δ , par la rotation Δ , on obtient $\sin \omega = \sin \frac{2\varphi}{3}$, d'où $\omega = \frac{2\varphi}{3}$

En permutant b et c , on obtiendrait $\omega = -\frac{2\varphi}{3}$, l'axe étant le même. Dans une permutation circulaire, on obtiendrait $\omega = \frac{2\varphi + 2\pi}{3}$

En conclusion trois rotations de même axe vérifient les conditions imposées.

EXERCICE n° 4

$$\text{Soit } M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

❶ On vérifie que $P(M) = M^2 + M - 2I$

❷ Le reste de la division euclidienne de X^n par $P(X)$ est un polynôme de degré 1.

$$X^n = (X^2 + X - 2)Q(X) + aX + b$$

Pour $X=1$, on obtient $a+b=1$

Pour $X=-2$, on a $(-2)^n = -2a + b$, d'où $a = \frac{1 - (-2)^n}{3}$ et $b = \frac{2 + (-2)^n}{3}$

❸ On a $M^n = (M^2 + M - 2I)Q(M) + aM + bI$ et $M^2 + M - 2I = 0$, donc

$$M^n = aM + bI, \text{ à savoir : } M^n = \begin{pmatrix} b-a & a & a \\ a & b-a & a \\ a & a & a \end{pmatrix}$$

La résolution du système donne : $U_n = M^n U_0$ et plus précisément,

$$\begin{cases} x_n = b - a = 1/3 [1 + (-1)^n 2^{n+1}] \\ y_n = 3a - b = 1/3 [1 - (-1)^n 2^{n+2}] \\ z_n = b - a = 1/3 [1 + (-1)^n 2^{n+1}] \end{cases}$$

EXERCICE n° 5

On calcule le $\det A_\lambda$ de la façon suivante : on ajoute la troisième colonne à la première, puis on soustrait la troisième ligne à la première, le terme λ^2 se met en facteur, puis on retranche la première colonne à la troisième pour obtenir :

$$\det A_\lambda = \lambda^2 \begin{vmatrix} 0 & 2+\lambda & -1 \\ 1+\lambda & 2-\lambda & -1 \\ 1+\lambda+\lambda^2 & 1-\lambda & -1 \end{vmatrix}$$

d'où $\det A_\lambda = -\lambda^2(\lambda-1)(2\lambda^2+2\lambda+1)$.

- Pour $\lambda=0$, la matrice devient $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Le noyau est de dimension 2 et

$rg A = 1$

Le noyau est engendré, par exemple, par les vecteurs $(1,-1,0)$ et $(0,0,1)$. L'image est une droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1,0,1)$.

- Pour $\lambda=1$, $rg A_1 = 2$ et l'image est engendrée par les vecteurs $(1,0,-1)$ et $(3,1,0)$. Par conséquent, $\dim Ker A_1 = 1$ et le noyau est engendré par le vecteur $(-2,1,1)$.

- Pour $\lambda \neq 0,1$, on vérifie que les 3 colonnes sont indépendantes, donc $\dim Im A_\lambda = 3$ et $\dim Ker A_\lambda = 0$

PROBLEME

① On a $\dim Ker A + \dim Im A = 3$.

On vérifie que $Ker A = \{0\}$, d'où $\dim Im A = 3$ et la résolution du système donne :

$$Im A = \{(X, Y, Z, T) / Y - X = T - Z\}.$$

Comme les vecteurs y_1, y_2, y_3 sont linéairement indépendants, ils forment une base de $Im A$.

② E_3 et $\text{Im } A$ ont la même dimension, il est donc possible de construire un isomorphisme entre ces 2 espaces vectoriels.

Pour déterminer \tilde{A} pour la base canonique de R^3 , il suffit de calculer les images des vecteurs de cette base, exprimées dans la base de $\text{Im } A$.

$\tilde{A}(1,0,0) = A(1,0,0) = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3$, puis on calcule les valeurs λ_i en résolvant le système : $\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \lambda_1 + \lambda_3 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 4$. Finalement $\tilde{A}(1,0,0) = (-2, 3, 4)$.

De même pour les deux autres vecteurs, on obtient :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -7 \\ 3 & 5 & 10 \\ 4 & 7 & 12 \end{pmatrix}$$

Comme \tilde{A} est une bijection, il existe une matrice inverse \tilde{A}^{-1} . D'autre part, $E_4 = \text{Im } A \oplus (\text{Im } A)^\perp$, on peut donc définir A^+ de la façon suivante :

$$A^+ y = \begin{cases} \tilde{A}^{-1} y & \text{si } y \in \text{Im } A \\ 0 & \text{si } y \in (\text{Im } A)^\perp \end{cases}$$

Par ailleurs A^+ est unique puisque la décomposition dans la somme directe est unique.

La matrice inverse de \tilde{A} est :

$$\tilde{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -10 & -13 & 5 \\ 4 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Soit $y_4 = (1, -1, -1, 1)$ un vecteur de $(\text{Im } A)^\perp$. La matrice A^+ relative aux bases $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ de E_4 et à la base canonique de R^3 est :

$$A^+ = \begin{pmatrix} -10 & -13 & 5 & 0 \\ 4 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour l'obtenir dans les deux bases canoniques, il suffit de la multiplier à droite par la matrice de passage suivante :

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

En conclusion, on obtient :

$$A^+ = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -38 & -2 & -14 & 22 \\ 13 & 3 & 3 & -7 \\ 5 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

③ Notons X la matrice des vecteurs $\{y_1, y_2, y_3\}$, la matrice de projection orthogonale sur $\text{Im } A$ s'écrit :

$$P_A = X(X'X)^{-1}X', \text{ où } X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{On obtient } (X'X)^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \text{ puis}$$

$$P_A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- Le calcul des produits des matrices donne : $A^+A = I_3$ et $AA^+ = P_A$.

④ $f(x+h) - f(x) = \langle A(x+h) - b, A(x+h) - b \rangle_4 - \langle Ax - b, Ax - b \rangle_4$
En développant cette expression, on obtient :

$$f(x+h) - f(x) = 2 \langle Ax - b, Ah \rangle_4 + \|Ah\|_4^2$$

$$\text{et } \|Ah\|_4^2 = o(\|h\|_4)$$

La fonction f est donc différentiable et $df(x) : h \mapsto 2 \langle Ax - b, Ah \rangle_4$.

$$\text{Par ailleurs } \langle Ax - b, Ah \rangle_4 = (Ah)'(Ax - b) = h'(A'(Ax - b)) = \langle A'Ax - A'b, h \rangle_3$$

On vérifie que A' est une application de E_4 dans E_3 , dont le noyau est engendré par le vecteur y_4 . $\text{Ker } A'$ est donc orthogonal à $\text{Im } A$, d'où A' est une bijection de $\text{Im } A$ sur E_3 et $A'A$ est une bijection de E_3 sur E_3 , donc elle est inversible. Par conséquent, il existe un unique \bar{x} tel que : $\bar{x} = (A'A)^{-1}A'b$.

La fonction f étant strictement convexe et différentiable, x réalise le minimum de f si et seulement si $df(x)(h) = 0, \forall h$ ou encore $A^T Ax = Ab$. Ce qui correspond au résultat précédent.

Le minimum est obtenu au point \hat{b} qui est la projection orthogonale de b sur $\text{Im } A$.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE
OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

I Etudes de suites

❶ Montrons par récurrence sur $n \geq 1$ la propriété :

$P(n)$: c_n et λ_n existent et valent $c_n = \cos(\frac{\pi}{2^n})$; $\lambda_n = 2^n \sin(\frac{\pi}{2^n})$.

La propriété $P(1)$ est vraie.

Si l'on suppose $P(n)$ vraie alors c_n est positif (car $c_n = \cos(\frac{\pi}{2^n})$) donc c_{n+1} existe et

$$\text{vaut } c_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + \cos(\frac{\pi}{2^n})}{2}} = \cos(\frac{\pi}{2^{n+1}}).$$

Comme c_{n+1} est positif alors λ_{n+1} existe et vaut :

$$\lambda_{n+1} = \frac{\lambda_n}{c_{n+1}} = \frac{2^n \sin(\frac{\pi}{2^n})}{\cos(\frac{\pi}{2^n})} = 2^{n+1} \sin(\frac{\pi}{2^{n+1}}).$$

On pose alors $\theta_n = \frac{\pi}{2^n}$ et $\alpha_n = 2^n$. On a $\sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin(\frac{\pi}{2^n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \frac{\pi}{2^n} = \pi.$$

② Rappelons la propriété $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin^{(2p+3)}(x)| \leq 1$.

L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $2p+1$ appliquée à la fonction sinus entre 0 et x donne :

$$\left| \sin x - \sum_{k=0}^p (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| \leq \frac{|x|^{2p+3}}{(2p+3)!}$$

En particulier pour $p=0$ et $x = \frac{\pi}{2^n}$ on déduit

$$|\pi - \lambda_n| = 2^n \left| \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) - \frac{\pi}{2^n} \right| \leq \frac{\pi^3}{6 \times 4^n}$$

On peut prendre $N_1 = 12$ car on a $\frac{\pi^3}{6 \times 4^n} \leq 10^{-6}$

③ L'inégalité de la question ② appliquée à $x = \frac{\pi}{2^n}$, après multiplication par 2^n ,

donne :

$$\left| \lambda_n - \sum_{k=0}^p (-1)^k \frac{\pi^{2k+1}}{4^{nk}(2k+1)!} \right| \leq \frac{\pi^{2p+3}}{4^{n(p+1)}(2p+3)!}$$

Comme $\frac{1}{4^{n(p+1)}}$ est négligeable devant $\frac{1}{4^{np}}$, on déduit le développement :

$$\lambda_n = \pi - \frac{\pi^3}{3!} \frac{1}{4^n} + \dots + (-1)^p \frac{\pi^{2p+1}}{(2p+1)!} \frac{1}{4^{pn}} + o\left(\frac{1}{4^{pn}}\right)$$

④ Pour $p=2$ le développement précédent donne :

$$\lambda_n = \pi - \frac{\pi^3}{3!} \frac{1}{4^n} + \frac{\pi^5}{120 \times 4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right)$$

On en déduit : $\lambda_n^{(1)} = \pi - \frac{\pi^5}{30 \times 4^{2n+2}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right)$

Et $\lambda_n^{(1)} - \pi \sim -\frac{\pi^5}{30 \times 4^{2n+2}}$

⑤ Pour tout α la formule de la question ④ donne :

$$\alpha \lambda_n^{(1)} + (1-\alpha) \lambda_{n+1}^{(1)} = \pi - \frac{\pi^5}{30 \times 4^{2n+4}} (15\alpha + 1) + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right)$$

le réel $\alpha = -\frac{1}{15}$ est l'unique réel tel que $\lambda_n^{(2)} - \pi$ est négligeable devant 16^{-n} .

⑥ L'inégalité de la question ⑤ pour $p=2$ prouve

$$-\frac{\pi^7}{7!4^{3n}} \leq \lambda_n - \pi + \frac{\pi^3}{6 \times 4^n} - \frac{\pi^5}{120 \times 16^n} \leq \frac{\pi^7}{7!4^{3n}}$$

En combinant les inégalités obtenues pour n et $n+1$ on déduit :

$$\left| \lambda_n^{(1)} - \pi + \frac{4\pi^5}{120 \times 16^{n+1}} \right| \leq \frac{68\pi^7}{3 \times 7!4^{3n+3}}$$

En combinant à nouveau ces inégalités pour n et $n+1$ on a :

$$-\frac{17\pi^7}{9 \times 7!4^{3n+3}} \leq \lambda_n^{(2)} - \pi \leq \frac{17\pi^7}{9 \times 7!4^{3n+3}}$$

Finalement $|\lambda_n^{(2)} - \pi| \leq \frac{17\pi^7}{576 \times 7!4^{3n}}$ On constate que pour $N_2 = 3$ on a :

$$|\lambda_n^{(2)} - \pi| \leq 10^{-6}.$$

II Polynômes de Bernoulli

① L'application F définie par $F(x) = G(x) - A$, où A est le nombre réel

$A = \int_0^1 G(t) dt$, convient car F est, comme G de classe C^1 et de dérivée f et en outre

on a $\int_0^1 F(t) dt = \int_0^1 G(t) dt - A = 0$. Si F_1 et F_2 sont deux solutions, $C = F_1 - F_2$ est de

dérivée nulle sur $[0,1]$, elle est donc constante sur $[0,1]$ et on a

$C = \int_0^1 C dt = 0$ Il existe donc une unique application de classe C^1 vérifiant les deux conditions

② D'après la question précédente les conditions données définissent une unique suite $(B_n)_{n \geq 0}$ de fonctions de classe C^1 .

Par définition de cette suite on a

$\forall n \in \mathbb{N}, B_n^{(n)} = 1$ donc B_n est une fonction polynômiale de degré n et de terme

dominant $\frac{X^n}{n!}$. D'après la question ① On a

$$\forall n \in \mathbb{N} B_{n+1}(x) = \int_0^x B_n(t) dt - \int_0^1 B_n(t) dt$$

On en déduit

$$B_1 = X - 0,5 \quad B_2 = \frac{6X^2 - 6X + 1}{12} \quad B_3 = \frac{2X^3 - 3X^2 + X}{12} \quad B_4 = \frac{X^4 - 2X^3 + X^2}{24} - \frac{1}{24 \times 30}$$

③ Pour $n \geq 2$ on a $B_n(0) = B_n(1)$. car :

$$B_n(1) - B_n(0) = \int_0^1 B_n'(t) dt = \int_0^1 B_{n-1}(t) dt = 0$$

④ La suite $(C_n)_{n \geq 0}$ vérifie les conditions de définition de la suite $(B_n)_{n \geq 0}$. En effet, on a :

$C_0 = B_0 = 1$ et si on a $B_n = C_n$, alors on a

$$C_{n+1}'(X) = (-1)^{n+1} (-B_{n+1}'(1-X)) = (-1)^n (-B_n'(1-X)) = C_n'(X)$$

Et en posant $u = 1 - t$

$$\int_0^1 C_{n+1}(t) dt = (-1)^{n+1} \int_0^1 B_{n+1}(u) du = 0$$

L'unicité de la suite $(B_n)_{n \geq 0}$ assure l'égalité.

Ainsi on a pour tout n et tout x

$$B_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)$$

Le graphe de B_n est donc symétrique par rapport à la droite d'équation $x=0,5$ si n est pair. Il est symétrique par rapport au point de coordonnées $(0,5, 0)$ si n est impair. En particulier pour n impair et $x=0,5$ on déduit

$$B_n(0,5) = 0 \text{ et pour } x=0, \text{ tenant compte de } B_n(0) = B_n(1), \text{ on déduit}$$

$$B_n(0) = B_n(1) = 0$$

⑤ Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que B_{2m+1} s'annule sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ et considérons m_0 le plus petit de ces entiers m .

Comme $B_1 = X - 0,5$ on a $m_0 \geq 1$. On sait que B_{2m_0+1} s'annule sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$; il s'annule

donc au moins trois fois sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. D'après le théorème de Rolle, $B_{2m_0} = B_{2m_0+1}'$ s'annule

donc au moins deux fois sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Cette dernière propriété contredit le caractère minimal de m_0 . L'hypothèse était absurde.

Pour $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$; il existe $c \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ tel que

$$B_{2m}(x) - B_{2m}(0) = xB'_{2m}(c) = xB_{2m-1}(c)$$

Ainsi, sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ $B_{2m}(x) - B_{2m}(0)$ a le signe de B_{2m-1} . Il en est de même sur

$\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ car pour $x > 0,5$ on a $c \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ tel que

$$B_{2m}(x) - B_{2m}(0) = B_{2m}(1-x) - B_{2m}(0) = (1-x)B'_{2m}(c) = (1-x)B_{2m-1}(c)$$

III Séries de Riemann et nombres de Bernoulli

❶ Pour tout N entier naturel non nul et $t \in]0,1[$ on a $e^{2ik\pi} \neq 1$ et :

$$1 + 2 \sum_{k=1}^N \cos(2k\pi t) = \sum_{k=-N}^{k=N} e^{2ik\pi t} = e^{-2iN\pi t} \frac{1 - e^{-2i(2N+1)\pi t}}{1 - e^{-2i\pi t}} = \frac{\sin((2N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}.$$

❷ Sur $]0,1[$ on a

$$\varphi_n(t) = \frac{f(t)}{g(\pi t)} \text{ avec } f(t) = \frac{B_b(t) - B_n(0)}{\pi t} \text{ et } g(t) = \frac{\sin t}{t}.$$

Or f est une fonction polynomiale donc elle admet un prolongement C^∞ sur R. On prolonge la fonction g en zéro en posant $g(0) = 1$, le prolongement de g est alors une fonction C^∞ sur R car c'est une fonction développable en série entière de rayon infini, de plus g ne s'annule sur R. Donc φ_n admet un prolongement continûment dérivable. à $[0,1]$.

❸ Soit f une fonction continûment dérivable sur $[0,1]$. Notons M_0 la borne supérieure de $|f|$ sur $[0,1]$ et M_1 la borne supérieure de $|f'|$ sur $[0,1]$.

$$\left| \int_0^1 f(t) \sin(xt) dt \right| = \left| -\frac{1}{x} [f(t) \cos(xt)]_0^1 + \frac{1}{x} \int_0^1 f'(t) \cos(xt) dt \right| \leq \frac{2M_0 + M_1}{x}$$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^1 f(t) \sin(xt) dt = 0$

④ Pour n impair le changement de variable $t = 1 - u$ montre que l'on a $I_{n,k} = 0$.

Pour $n \geq 4$ pair on a $B_{n-1}(0) = B_{n-1}(1) = 0$ et deux intégrations par parties donnent :

$$\begin{aligned} I_{n,k} &= \left[B_n(t) \frac{\sin(2k\pi t)}{2k\pi} \right]_0^1 - \int_0^1 B_n'(t) \frac{\sin(2k\pi t)}{2k\pi} dt \\ &= \left[B_{n-1}(t) \frac{\cos(2k\pi t)}{(2k\pi)^2} \right]_0^1 - \int_0^1 B_{n-1}'(t) \frac{\cos(2k\pi t)}{(2k\pi)^2} dt \\ &= - \int_0^1 B_{n-2}(t) \frac{\cos(2k\pi t)}{(2k\pi)^2} dt = \frac{I_{n-2,k}}{4k^2\pi^2}. \end{aligned}$$

Reprenons le calcul avec $n=2$, en tenant compte de

$B_1(1) = -B_1(0) = \frac{1}{2}$. On trouve

$$I_{2,k} = \frac{1}{(2k\pi)^2}. \text{ On déduit } I_{2p,k} = \frac{(-1)^{p-1}}{(2k\pi)^{2p}}.$$

⑤ Comme $\int_0^1 \cos(2k\pi t) dt = 0$ pour $k \geq 1$ on a pour $m \geq 1$ et N entier naturel :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi_{2m}(t) \sin((2N+1)\pi t) dt &= \int_0^1 (B_{2m}(t) - B_{2m}(0)) dt + 2 \sum_{k=1}^N \int_0^1 (B_{2m}(t) - B_{2m}(0)) \cos((2N+1)\pi t) dt \\ &= -B_{2m}(0) + 2 \sum_{k=1}^N I_{2m,k} \\ &= -B_{2m}(0) + 2(-1)^{m-1} \sum_{k=1}^N \frac{1}{(2k\pi)^{2m}} \end{aligned}$$

La fonction φ_{2m} étant C^1 sur $[0,1]$, la question ③ prouve que :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^{2m}} = (-1)^{m-1} 2^{2m-1} \pi^{2m} B_{2m}(0)$$

Donc la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}}$ converge et a pour somme $(-1)^{m-1} 2^{2m-1} \pi^{2m} B_{2m}(0)$

En particulier on trouve

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

⑥ Pour $p \geq 2$ et $k \geq 1$ on a $k^p \geq k^2$. En majorant $\frac{1}{k^2}$ par $\int_{k-1}^k \frac{dt}{t^2}$ pour $k \geq 2$, on

obtient :

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^p} \leq \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^2} = 2$$

On en déduit

$$|B_{2m}(0)| \leq \left(\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^{2m}} \right) 2^{1-2m} \pi^{-2m} \leq \frac{4}{(4\pi^2)^m}.$$

IV Formule sommatoire d'Euler

① Montrons cette formule par récurrence sur m .

Pour $m=0$ on a $B_1(1) = -B_1(0) = \frac{1}{2}$ donc

$$\int_0^1 f'(t) B_1(t) dt = [f(t) B_1(t)]_0^1 - \int_0^1 f(t) dt = \frac{f(0) + f(1)}{2} - \int_0^1 f(t) dt$$

c'est la formule demandée.

Supposons cette formule vraie pour $m \geq 1$ et considérons f de classe C^{2m+3} . On a

$$\int_0^1 f^{(2m+3)}(t) B_{(2m+3)}(t) dt = [f^{(2m+2)}(t) B_{(2m+3)}(t)]_0^1 - \int_0^1 f^{(2m+2)}(t) B'_{(2m+3)}(t) dt$$

Ce qui, d'après les résultats de la partie II prouve

$$\int_0^1 f^{(2m+3)}(t) B_{(2m+3)}(t) dt = - \int_0^1 f^{(2m+2)}(t) B_{(2m+2)}(t) dt$$

Une intégration par partie donne

$$\int_0^1 f^{(2m+3)}(t) B_{(2m+3)}(t) dt - [f^{(2m+1)}(t) B_{(2m+2)}(t)]_0^1 + \int_0^1 f^{(2m+1)}(t) B'_{(2m+2)}(t) dt =$$

$$B_{(2m+2)}(0) \frac{f^{(2m+1)}(1) - f^{(2m+1)}(0)}{2} + \int_0^1 f^{(2m+1)}(t) B_{(2m+1)}(t) dt$$

L'hypothèse de récurrence permet d'obtenir la formule pour $m+1$.

② Une intégration par partie donne :

$$\begin{aligned} \int_0^1 f^{(2m+1)}(t) B_{(2m+1)}(t) dt &= \left[f^{(2m+1)}(t) (B_{(2m+2)}(t) - B_{(2m+2)}(0)) \right]_0^1 \\ &\quad - \int_0^1 f^{(2m+2)}(t) (B_{(2m+2)}(t) - B_{(2m+2)}(0)) dt \\ &= - \int_0^1 f^{(2m+2)}(t) (B_{(2m+2)}(t) - B_{(2m+2)}(0)) dt \end{aligned}$$

Comme $B_{(2m+2)}(t) - B_{(2m+2)}(0)$ est de signe constant que l'on note ε sur $[0,1]$, on déduit :

$$-\varepsilon \inf_{t \in [0,1]} f^{(2m+2)}(t) B_{(2m+2)}(0) \leq \varepsilon \int_0^1 f^{(2m+2)}(t) (B_{(2m+2)}(t) - B_{(2m+2)}(0)) dt \leq -\varepsilon \sup_{t \in [0,1]} f^{(2m+2)}(t) B_{(2m+2)}(0)$$

On a alors :

$$\inf_{t \in [0,1]} [f^{(2m+2)}(t) B_{(2m+2)}(0)] \leq \int_0^1 f^{(2m+1)}(t) B_{(2m+1)}(t) dt \leq \sup_{t \in [0,1]} [f^{(2m+2)}(t) B_{(2m+2)}(0)]$$

L'existence de c est conséquence du théorème des valeurs intermédiaires. La majoration est alors :

$$\left| \int_0^1 f^{(2m+1)}(t) B_{(2m+1)}(t) dt \right| \leq \|f^{(2m+2)}\| \|B_{(2m+2)}(0)\|$$

③ Notons $T(f) = \frac{1}{n} \left(\frac{f(0) + f(1)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \right)$ et $h = \frac{1}{n}$.

Les formules obtenues aux questions IV ① et ② lorsque $m=2$ donnent l'existence de constantes C_i bornées en valeur absolue par $\|f^{(6)}\|$ telles que :

$$\frac{1}{h} \int_{ih}^{(i+1)h} f(x) dx = \int_0^1 f(ih + ht) dt = \frac{f((i+1)h) + f(ih)}{2} - B_2(0)h(f'((i+1)h) - f'(ih)) - B_4(0)h^3(f^{(3)}((i+1)h) - f^{(3)}(ih)) - B_6(0)h^5 C_i$$

En sommant ces relations on obtient :

$$\int_0^1 f(t) dt = T(f) - B_2(0)(f'(1) - f'(0))h^2 - B_4(0)(f^{(3)}(1) - f^{(3)}(0))h^4 - r(h)$$

avec $|r(h)| \leq h^6 B_6(0) \|f^{(6)}\| \leq \|f^{(6)}\| \frac{h^6}{16\pi^6}$

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE
OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DU CALCUL NUMERIQUE

EXERCICE I

a) f est continue, car composition des deux fonctions continues $x \mapsto \sin x$ et $t \mapsto |t|$. On a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq -1 = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0},$$

donc f n'est pas dérivable en 0. La plus petite période est π .

b) $T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} (-1)^k (x - \frac{\pi}{2})^{2k}$. Rayon de convergence infini. $I = [0, \pi]$.

c) Comme f est une fonction paire on a $b_1 = b_2 = \dots = 0$. Les autres coefficients sont donnés par

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\sin x| \cos kx dx.$$

En intégrant (deux fois) par parties on obtient

$$\int \sin x \cos kx dx = \frac{\cos x \cos kx + k \sin x \sin kx}{k^2 - 1} + C, k \neq 1,$$

et

$$\int \sin x \cos x dx = \frac{(\sin x)^2}{2} + C.$$

Ainsi on arrive à $a_k = 0$ pour k impair et $a_k = -\frac{4}{(k^2 - 1)\pi}$ pour k pair.

$$d) T_4\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sum_{k=0}^2 \frac{1}{(2k)!} (-1)^k \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)^{2k} = 1 - \frac{\pi^2}{32} + \frac{\pi^4}{1024} \approx 0,786700927.$$

$$F_4\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos \frac{\pi}{2}}{3} + \frac{\cos \pi}{15} \right) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{15\pi} \approx 0,721502408.$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707106781.$$

Donc F_4 est une meilleure approximation en $\frac{\pi}{4}$.

EXERCICE II

1) $\lim_{t \rightarrow 0^+} F(t) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5}{e^x - 1} = 0$, car l'exponentielle croît plus vite que toute puissance.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^5}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{5x^4}{e^x} = 0, \text{ d'après la règle de l'Hôpital.}$$

F est continue, strictement positive et tend vers 0 aux bords de son domaine de définition. Elle possède donc un maximum.

- 2)
- $F(0,05) \approx 0,01$
 - $F(0,1) \approx 4,54$
 - $F(0,15) \approx 16,78$
 - $F(0,2) \approx 21,20$
 - $F(0,25) \approx 19,1$
 - $F(0,3) \approx 15,2$
 - $F(0,4) \approx 8,7$
 - $F(0,5) \approx 5,0$
 - $F(0,6) \approx 3,00$
 - $F(0,7) \approx 1,87$
 - $F(0,8) \approx 1,22$
 - $F(0,9) \approx 0,83$
 - $F(1,0) \approx 0,58$

Il y a donc un maximum en $0,2 \pm 5 \times 10^{-2}$.

3) F est dérivable, donc si t est maximum de F alors $F'(t) = 0$.

$$F'(t) = -5t^{-6} \left(e^{\frac{1}{t}} - 1 \right)^{-1} + t^{-5} \left(e^{\frac{1}{t}} - 1 \right)^{-2} e^{\frac{1}{t}} t^{-2} = -t^{-7} \left(e^{\frac{1}{t}} - 1 \right)^{-2} \left(5t \left(e^{\frac{1}{t}} - 1 \right) - e^{\frac{1}{t}} \right).$$

Donc $F'(t) = 0$ si et seulement si $5t \left(e^{\frac{1}{t}} - 1 \right) - e^{\frac{1}{t}} = 0$.

4) Avec $t = \frac{1}{x}$ l'équation $5t \left(e^{\frac{1}{t}} - 1 \right) - e^{\frac{1}{t}} = 0$, $t > 0$, devient $5(e^x - 1) - xe^x = 0$ ou bien

$$5(1 - e^{-x}) - x = 0, \text{ q.e.d.}$$

5) $f'(x) = 5e^{-x} > 0$, donc f est croissant.

$$f(4) = 4,90... > 4,$$

$$f(5) = 4,96... < 5,$$

ainsi $f([4,5]) \subset [4,5]$.

$$q := \sup_{x \in [4,5]} |f'(x)| = 5e^{-4} = 0,09157... < 1,$$

donc d'après le théorème du point fixe il existe une solution unique de $f(x) = x$ dans l'intervalle $[4,5]$.

6) $f'(x) > 1$ pour $x < \ln 5$. Alors la fonction $f(x) - x$ est strictement croissante pour $x < \ln 5$. Comme $f(0) = 0$, on a $f(x) > x$ pour tout $x \in]0, \ln 5]$. Pour $x > \ln 5$ la fonction $f(x) - x$ est strictement décroissante, donc admet au plus une racine qui doit alors être celle qu'on a trouvé dans l'intervalle $[4,5]$ de la question précédente.

7) D'après 1) on sait que F possède un maximum et d'après les questions précédentes il est unique :

$$\tau = \xi^{-1}, \text{ où } \xi \text{ est l'unique solution de } f(x) = x, x > 0.$$

9) D'après le théorème du point fixe la suite $x_0 := 5$, $x_n := f(x_{n-1})$, converge vers ξ , et on dispose de la majoration

$$|\xi - x_n| \leq \frac{q}{1-q} |x_n - x_{n-1}| = \frac{5e^{-4}}{1-5e^{-4}} |x_n - x_{n-1}| \leq 0,101 |x_n - x_{n-1}|.$$

Le calcul à $\pm 10^{-6}$ près donne

$$x_0 = 5$$

$$x_1 = 4,966310...$$

$$x_2 = 4,965155...$$

$$x_3 = 4,964115...$$

$$x_4 = 4,965114...$$

$$x_5 = 4,965114...$$

Par suite $\xi = 4,965114 \pm 10^{-6}$. Donc $\tau = \xi^{-1} = 0,2014052 \pm 10^{-7}$ est la maximum de F .

www.touslesconcours.info

www.touslesconcours.info