

**SESSION
D'AVRIL**

1998

www.touslesconcours.info

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE
DE MATHEMATIQUES

*

* *

PARTIE n° 1

Existence du polynôme de meilleure approximation.

① E est trivialement un espace vectoriel normé par la norme sup.

②- Soit d la distance de f à F_p . Par définition, il existe une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans F_p telle que, pour tout n $\|g_n - f\| < d + \frac{1}{n+1}$. Cela implique $\|g_n\| < \|f\| + d + 1$. La boule fermée de F_p $B(0, \|f\| + d + 1)$ est compacte, donc il existe une suite extraite de $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que l'on continue à appeler $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et qui converge vers $g \in F_p$. Par continuité de la norme, on en déduit $\|g - f\| = d$; D'où l'existence de $P = g$.

PARTIE n° 2

Unicité du polynôme de meilleure approximation.

① Si $d = 0$, alors $P = f$ et $f \in F_p$. Réciproquement, si $f \in F_p$, $d = 0$ et $P = f$ est unique.

② Soit $d \neq 0$, $\alpha = \sup_{x \in [a,b]} [P(x) - f(x)]$ et $\beta = \inf_{x \in [a,b]} [P(x) - f(x)]$. On doit déjà avoir $\alpha \leq d$ et $\beta \geq -d$. Si $\alpha < d$, soit $Q = P + \frac{d - \alpha}{2} \in F_p$. Alors :

$$\sup_{x \in [a,b]} [Q(x) - f(x)] = \alpha + \frac{d - \alpha}{2} = \frac{d + \alpha}{2} < d \text{ et } \inf_{x \in [a,b]} [Q(x) - f(x)] \geq -d + \frac{d - \alpha}{2} > -d.$$

C'est absurde, donc $\alpha = d$; de même, $\beta = -d$.

Or $P - f$ est continue. Donc, il existe $x_1 \in [a,b]$ tel que $P(x_1) - f(x_1) = \alpha = d$ et $A_1 \neq \emptyset$.

On montre de même que $A_{-1} \neq \emptyset$.

③ $P - f$ est continue sur l'intervalle $[a,b]$ qui est compact. Elle y est donc uniformément continue et il existe $\gamma > 0$ tel que $\forall (x,y) \in [a,b]^2$, si $|x - y| \leq \gamma$ alors :

$$|(P - f)(x) - (P - f)(y)| \leq \frac{d}{2}$$

Fixons m entier supérieur ou égal à $\frac{b-a}{\gamma}$. Le découpage tel que $x_k = a + k \frac{b-a}{m}$ répond à la question. On fixe ce découpage dans la suite du problème.

④ Soit $(x,y) \in A_1 \times A_{-1}$. Alors, $(P - f)(x) - (P - f)(y) = 2d$, donc x et y ne peuvent pas être sur le même segment (saut maximum de $\frac{d}{2}$) ni sur des segments contigus (saut maximum de d). Mais $A_1 \neq \emptyset$ et $A_{-1} \neq \emptyset$. Donc il y a au moins trois segments différents ($m \geq 3$) et il y a au moins un segment dans I_ε , un segment dans $I_{-\varepsilon}$ (qui sont forcément distincts), d'où $\text{card}(I) = r \geq 2$.

⑤ Soit $I = \{i_1, \dots, i_r\}$ suite strictement croissante telle que $B_j = [x_{i_j-1}, x_{i_j}] \subset I_1 \cup I_{-1}$. Puisque $I_1 \cap I_{-1} = \emptyset$, cela implique qu'il existe un unique ε_1 tel que $B_{i_1} \in I_{\varepsilon_1}$.

Donc il existe un seul $j_1 \in I$, $j_1 = \sup i_k$ tels que $B_{i_1}, \dots, B_{i_r} \in I_{\varepsilon_1}$; il existe un seul $j_2 \in I$, $j_2 = \sup i_l$ tels que $B_{i_{k+1}}, \dots, B_{i_l} \in I_{-\varepsilon_1} = I_{\varepsilon_2}$; etc.

D'où, de proche en proche, il existe une seule suite $(j_1, \dots, j_q)$ et $q \geq 2$.

⑥ Soit $C_k = \bigcup_{j_{k-1} < j \leq j_k} B_j$. On sait que B_{j_k} et $B_{j_{k+1}}$ ne sont pas contigus (id est : $j_{k+1} > j_k + 1$). Cela implique que si $u \in]x_{i_{j_k}}, x_{i_{j_{k+1}}}[$, on a $x < u < y$ pour tout $(x, y) \in C_k \times C_{k+1}$.

A partir de maintenant, u_k est fixé et appartient à $]x_{i_{j_k}}, x_{i_{j_{k+1}}}[[$.

⑦ Soit $Q(x) = (x - u_1) \dots (x - u_{q-1})$. La fonction $P - f$ ne s'annule sur aucun B_j (car $\inf |P - f| \geq d/2$ sur B_j). Il en va trivialement de même pour Q . On en déduit que $(P - f)Q$ est de signe constant sur chacun des C_k .

De plus, lorsque l'on passe de C_k à C_{k+1} , $P - f$ change de signe (signe de ε_k) ainsi que Q (qui franchit un seul zéro). Le signe de $(P - f)Q$ est donc constant sur $\bigcup C_k$.

⑧ i) Sur $[a, b] \setminus \bigcup C_k$, $\sup |P(x) - f(x)| = d_1 < d$ (f ne peut atteindre d ou $-d$ en une borne de C_k , par définition de C_k).

Soit $M = \sup |Q(x)|$. Alors $\sup |P(x) - f(x) + \lambda Q(x)| \leq d_1 + |\lambda| M$

Finalement, si $|\lambda| < \frac{d - d_1}{M}$, alors $|P(x) - f(x) + \lambda Q(x)| < d$

ii) Sur $\bigcup C_k$, $P - f$ et Q ont le même signe. Si on impose $\lambda < 0$, alors :

$$|P(x) - f(x) + \lambda Q(x)| = |P(x) - f(x)| - |\lambda| |Q(x)|$$

Or $|P(x) - f(x)| \geq d/2$; En imposant de plus $|\lambda| M < d/2$, on aura :

$$|P(x) - f(x) + \lambda Q(x)| = |P(x) - f(x)| - |\lambda| |Q(x)| < d$$

Récapitulons : en prenant $\lambda < 0$ et $|\lambda| \leq \inf\left(\frac{d-d_1}{2}; \frac{d}{2M}\right)$, et puisque $P - f + \lambda Q$ est continue, on aura bien $\|P - f + \lambda Q\| < d$. Mais alors, $Q \notin F_p$ (car sinon, $P + \lambda Q \in F_p$, ce qui est absurde). Donc le degré de Q est supérieur ou égal à $p+1$, ce qui implique $q \geq p+2$.

On peut alors choisir $p+2$ valeurs successives de k , k variant de 1 à $p+2$, telles que sur chaque C_k , il existe y_k tel que $(P - f)(y_k) = \varepsilon_k d$.

⑨ i) Si P et P_1 sont dans F_p tels que $\|P - f\| = \|P_1 - f\| = d$, on aura :

$$\left\| \frac{1}{2}(P + P_1) - f \right\| \leq \frac{1}{2}\|P - f\| + \frac{1}{2}\|P_1 - f\| = d$$

Mais $\frac{1}{2}(P + P_1) \in F_p$, on doit donc nécessairement avoir $\left\| \frac{1}{2}(P + P_1) - f \right\| \geq d$; Il y a donc égalité.

ii) Soit x tel que $\frac{1}{2}(P(x) + P_1(x)) - f(x) = d$. Puisque $P(x) - f(x) \leq d$ et $P_1(x) - f(x) \leq d$, on doit en fait avoir : $P(x) - f(x) = P_1(x) - f(x) = d$. On a le même résultat pour les points y où $\frac{1}{2}(P(y) + P_1(y)) - f(y) = -d$.

Mais alors, $P - f$ et $P_1 - f$ prennent les mêmes valeurs aux $p+2$ points y_k ; $P - P_1$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $p+1$ qui s'annule $p+2$ fois, donc $P = P_1$.

⑩ Soit $R \in F_p$ tel qu'il existe $(z_1, \dots, z_{p+2})$ dans $[a, b]$ où $R(z_i) - f(z_i) = (-1)^i \zeta \|R - f\|$ quel que soit $i \in \{1, \dots, p+2\}$. Posons $\|R - f\| = \delta$. Il y a deux cas possibles :

■ pour i tel que $(-1)^i \zeta = +1$, $R(z_i) - f(z_i) = \delta \geq d$ et $f(z_i) - P(z_i) \geq -d$, ce qui implique $R(z_i) - P(z_i) \geq 0$.

■ pour i tel que $(-1)^i \zeta = -1$, $R(z_i) - f(z_i) = -\delta \leq -d$ et $f(z_i) - P(z_i) \leq d$, ce qui implique $R(z_i) - P(z_i) \leq 0$.

Si $R \neq P$, $\delta > d$ et $R(z_i) - f(z_i)$ est strictement positif ou strictement négatif selon la parité de i . Donc $R - P$ admet au moins $p+1$ zéros. C'est impossible, donc $R = P$.

En fait, la suite $(z_1, \dots, z_{p+2})$ caractérise P .

PARTIE n° 3

Exemples.

❶ Soit P_0 le polynôme de meilleure approximation de f dans F_0 . Posons $M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$ et $m = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$. Alors $P_0 = \frac{M+m}{2}$; En effet :

$$\exists x_1 \in [a,b], f(x_1) = M, \text{ ce qui implique } (P_0 - f)(x_1) = \frac{m-M}{2}$$

$$\exists x_2 \in [a,b], f(x_2) = m, \text{ ce qui implique } (P_0 - f)(x_2) = \frac{M-m}{2}$$

$$\text{Et } \|P_0 - f\| = \frac{M-m}{2}.$$

❷ $f(x) = e^x$. Soit P_1 le polynôme de meilleure approximation de f dans F_1 . Posons $P_1(x) = \alpha x + \beta$. D'après la question II-10, il existe z_1, z_2, z_3 tels que $(P - f)(z_1) = (P - f)(z_3)$, donc $(P - f)'$ s'annule une seule fois sur $[a,b]$. On obtient $\alpha - e^x = 0$ (et donc $\alpha > 0$), qui est équivalent à $x = \ln(\alpha) \in [a,b]$. $P - f$ est croissante de a à $\ln(\alpha)$ et décroissante de $\ln(\alpha)$ à b . Donc $\|P - f\| = -(P - f)(a) = -(P - f)(b) = (P - f)(\ln(\alpha))$ ou, de façon équivalente :

$$e^a - \alpha a - \beta = e^b - \alpha b - \beta = \alpha \ln(\alpha) + \beta - \alpha$$

ce qui donne :

$$\alpha = \frac{e^b - e^a}{b - a}; \beta = \frac{1}{2(b-a)} \left[be^a - ae^b + (e^b - e^a) \left(1 - \ln \left(\frac{e^b - e^a}{b - a} \right) \right) \right]$$

❸ $a = -b$, $f(x) = x^2 - \varepsilon x$ avec $\varepsilon = \text{sgn}(x)$: c'est une fonction paire. Le polynôme de meilleure approximation P doit donc être pair aussi, car $Q(x) = P(-x)$ est aussi un polynôme de meilleure approximation, et d'après la question II-10, ce polynôme est unique.

Posons $P(x) = \alpha x^2 + \beta$. Toujours d'après la question II-10, il existe z_1, z_2, z_3, z_4 où $P - f$ vaut $\pm d$. Par parité, il existe z_5 tel que $(P - f)(z_5) = \pm d$ et $z_3 = 0$. Soit $g = P - f$, étudiée sur $[0, b]$. Puisque $g(0) = g(z_5)$, $g'(x) = 2(\alpha - 1)x + 1$ s'annule en $z_4 = \frac{-1}{2(\alpha - 1)}$. Cela implique $\alpha - 1 < 0$, et donc g est croissante de 0 à $\frac{-1}{2(\alpha - 1)}$ et décroissante de $\frac{-1}{2(\alpha - 1)}$ à $b = z_5$. Finalement, $g(0) = -g\left(\frac{-1}{2(\alpha - 1)}\right) = g(b)$, ce qui implique $\beta = (\alpha - 1)b^2 + b + \beta$ et donc $\alpha - 1 = -\frac{1}{b}$, donc $\frac{-1}{2(\alpha - 1)} = \frac{b}{2}$ et $g\left(\frac{b}{2}\right) = -g(0)$ est équivalent à $\alpha \frac{b^2}{4} + \beta = -\beta$.

Finalement : $P(x) = (1 - 1/b)x^2 - b/8$

AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

*

* *

EXERCICE n° 1

① $\det(M - \lambda I) = (1 - \lambda)^3 - \frac{1}{2}(1 - \lambda) = (1 - \lambda)((1 - \lambda)^2 - \frac{1}{2})$. Les valeurs propres de la matrice sont : $1, 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ces trois valeurs étant strictement positives, la matrice est définie positive.

② Soit $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice de la projection orthogonale sur F au sens du produit scalaire défini par M est égale à : $X(X'MX)^{-1}X'M$, où M' désigne la transposée de M .

Calculons $P_F(u)$ pour $u \in \mathbf{R}^3$,

$$X'M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } X'MX = I_2, \text{ d'où } X(X'MX)^{-1}X'M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour $u = (x, y, z)$, on a $P_F(u) = (0, \frac{1}{2}x + y, \frac{1}{2}x + z)$

EXERCICE n° 2

① La décomposition de ϕ en carrés selon la méthode de Gauss donne :

$$\phi(x) = 2x_1x_2 + x_1(3x_3 + 4x_4) + 5x_2x_3$$

$$\phi(x) = \frac{1}{2}(2x_2 + 3x_3 + 4x_4)(2x_1 + 5x_3) - \frac{5}{2}x_3(3x_3 + 4x_4)$$

On détermine alors deux formes linéaires l_1 et l_2 sur E par :

$$l_1 + l_2 = 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \text{ et } l_1 - l_2 = 2x_1 + 5x_3$$

On obtient,

$$l_1 = x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 \text{ et } l_2 = -x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4$$

De même, on détermine deux formes linéaires l_3 et l_4 sur E par :

$$l_3 + l_4 = 3x_3 + 4x_4 \text{ et } l_3 - l_4 = x_3, \text{ d'où}$$

$$l_3 = 2(x_3 + x_4) \text{ et } l_4 = x_3 + 2x_4$$

On obtient ainsi,

$$\phi(x) = \frac{1}{2}(l_1^2 - l_2^2) - \frac{5}{2}(l_3^2 - l_4^2)$$

$$\phi(x) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4)^2 - \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4)^2 - 10(x_3 + x_4)^2 + \frac{5}{2}(x_3 + 2x_4)^2$$

La signature de ϕ est donc $(2, 2, n-4)$. Si $n = 4$, ϕ est non dégénérée.

② Pour obtenir une base ϕ -orthogonale de E , il suffit de transformer la base initiale de E par la matrice P définie par son inverse

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dans cette base ϕ s'écrit : $\phi(x) = \frac{1}{2}X_1^2 - \frac{1}{2}X_2^2 - 10X_3^2 + \frac{5}{2}X_4^2$

EXERCICE n° 3

① Les vecteurs de F sont invariants par S_F et P_F . On a $E = F \oplus F^\perp$, donc pour tout $x \in E$, $x = P_F(x) + (x - P_F(x))$. Géométriquement on obtient $S_F(x) = x - 2(x - P_F(x))$ ou encore $S_F = 2P_F - I$.

② Pour $F = \text{Vect}(a)$ et pour $x \in E$, on a :

$$P_F(x) = \frac{(x, a)}{\|a\|^2} a \text{ et } S_F(x) = 2 \frac{(x, a)}{\|a\|^2} a - x$$

En effet, $e = \frac{a}{\|a\|}$ est une base orthonormée de F , donc $P_F(x) = \lambda e$ avec

$$\lambda(x, e) = (x, \frac{a}{\|a\|}) = \frac{1}{\|a\|} (x, a)$$

Pour $F = a^\perp$, comme $E = \text{Vect}(a) \oplus a^\perp$, on a $P_E = I = P_{\text{Vect}(a)} + P_{a^\perp}$. On en déduit :

$$S_F = 2P_F - I = 2(I - P_a) - I = I - P_a \text{ et}$$

$$S_F(x) = x - 2 \frac{(x, a)}{\|a\|^2} a$$

③ Pour $F = \text{Vect}(a)$, $P_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 0 \end{pmatrix}$ et $S_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & -1 & 0 & . \\ . & 0 & -1 & 0 \\ 0 & . & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Pour $F = a^\perp$, $P_F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 1 & . & 0 \\ . & . & 1 & . \\ 0 & 0 & . & 1 \end{pmatrix}$ et $S_F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . \\ . & 0 & 1 & 0 \\ 0 & . & 0 & 1 \end{pmatrix}$

EXERCICE n° 4

① On a $D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & . & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & . \\ 0 & 1 & a+b & ab & 0 \\ . & 0 & . & . & ab \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$

En développant ce déterminant par rapport à la première colonne, on trouve :

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$$

② On vérifie que $D_n = \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k}$.

PROBLEME

① $X'X = \begin{pmatrix} X'_1 \\ . \\ X'_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 & . & X_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|x_1\|^2 & . & \langle x_i, x_j \rangle \\ . & . & . \\ \langle x_i, x_j \rangle & . & \|x_p\|^2 \end{pmatrix} = G(x_1, \dots, x_p),$

$X'X$ est appelée matrice de Gram.

② On choisit x_{p+1} orthogonal à tous les vecteurs $\{x_1, \dots, x_p\}$ et unitaire, puis x_{p+2} orthogonal à tous les vecteurs $\{x_1, \dots, x_p, x_{p+1}\}$ et unitaire. Ainsi, on obtient par la méthode de Gauss :

$$\begin{aligned}\langle x_i, x_j \rangle &= 0, \forall 1 \leq i \leq p, \forall p+1 \leq j \leq n \\ \langle x_j, x_j \rangle &= 1, \forall p+1 \leq j \leq n \\ \langle x_i, x_j \rangle &= 0, \forall p+1 \leq i, j \leq n, i \neq j\end{aligned}$$

Ceci correspond à l'égalité demandée.

D'autre part, $(\det \hat{X})^2 = \det \hat{X}' \hat{X} = \det X' X$ et

$\det G(x_1, \dots, x_p) = \det X' X = \det X' X \cdot \det I_{n-p} = \det G(x_1, \dots, x_n)$, d'où l'égalité.

Il est clair qu'alors $\det G(x_1, \dots, x_p) > 0$.

On peut compléter les deux familles libres de vecteurs $\{x_1, \dots, x_p\}$ et $\left\{x_1, \dots, x_{p-1}, x_p + \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i x_i\right\}$, qui engendrent le même sous-espace vectoriel, par les mêmes vecteurs $\{x_{p+1}, \dots, x_n\}$ et obtenir ainsi,

$$(\det \hat{X})^2 = \det G(x_1, \dots, x_p) \text{ et } (\det \hat{X})^2 = \det G(x_1, \dots, x_{p-1}, x_p + \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i x_i)$$

D'où le résultat demandé :

$$\det G(x_1, \dots, x_{p-1}, x_p) = \det G(x_1, \dots, x_{p-1}, x_p + \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i x_i)$$

③ On a $P_F(y) = \sum_{j=1}^p \lambda_j x_j$. Si $y \notin F$, les vecteurs $\{x_1, \dots, x_p, y\}$ sont indépendants et on applique le résultat précédent à l'ordre $p+1$ (dans ce cas le vecteur $y - P_F(y)$ est orthogonal à F). Si $y \in F$, $y - P_F(y) = 0$ et $y = P_F(y) = \sum_{j=1}^p \lambda_j x_j$, dans ce cas les deux déterminants sont nuls.

$$G(x_1, \dots, x_p, y - P_F(y)) = \begin{pmatrix} X' X & 0 \\ 0 & \|y - P_F(y)\|^2 \end{pmatrix}$$

On a les trois égalités suivantes :

$$\det G(x_1, \dots, x_p, y - P_F(y)) = \det G(x_1, \dots, x_p, y)$$

$$\det G(x_1, \dots, x_p, y - P_F(y)) = \det G(x_1, \dots, x_p, y) \times \|y - P_F(y)\|^2$$

$$(d(y, F))^2 = \|y - P_F(y)\|^2$$

On en déduit,

$$(d(y, F))^2 = \frac{\det G(x_1, \dots, x_p, y)}{\det G(x_1, \dots, x_p)}$$

$$\textcircled{4} \quad G(x_1, \dots, x_p, y) = \begin{pmatrix} X'X & X'y \\ y'X & \|y\|^2 \end{pmatrix}.$$

D'où $\det G(x_1, \dots, x_p, y) = \det X'X \times \det (\|y\|^2 - y'X(X'X)^{-1}X'y)$

ou encore,

$$\det G(x_1, \dots, x_p, y) = (\|y\|^2 - y'X(X'X)^{-1}X'y) \times \det G(x_1, \dots, x_p)$$

D'autre part, $(d(y, F))^2 = \|y - P_F(y)\|^2 = \|y - X(X'X)^{-1}X'y\|^2$

En développant cette dernière expression, on obtient :

$$\|y\|^2 - y'X(X'X)^{-1}X'y = (d(y, F))^2 \text{ et donc,}$$

$$(d(y, F))^2 = \frac{\det G(x_1, \dots, x_p, y)}{\det G(x_1, \dots, x_p)}$$

AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DE L'EPREUVE DE CALCUL NUMERIQUE

*

* *

PARTIE n° 1

① On a trivialement que $\|A\| = 0$ si et seulement si $A = 0$ et que $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$ quel que soit λ appartenant à $\mathbb{R}$. Pour prouver la troisième propriété, on remarque que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|(A+B)x\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq (\|A\| + \|B\|)\|x\|$, ce qui implique bien que $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

② $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|ABx\| \leq \|A\| \|Bx\| \leq \|A\| \|B\| \|x\|$, ce qui implique bien que $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$

③ ① $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right] |x_j| \leq \max_{1 \leq j \leq n} \left[\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right] \left(\sum_{j=1}^n |x_j| \right)$, et donc $\|A\|_1 \leq \max_{1 \leq j \leq n} \left[\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right]$. Par ailleurs, en considérant $x \in \mathbb{R}^n$ dont toutes les composantes sont nulles, excepté la composante j pour laquelle $\left[\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right]$ est maximal, on voit que $\|A\|_1 \geq \max_{1 \leq j \leq n} \left[\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right]$; d'où l'égalité demandée.

② $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|Ax\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot \|x\|_\infty$, et donc $\|A\|_\infty \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left[\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right]$. Par ailleurs, en considérant $x \in \mathbb{R}^n$ tel que, si i atteint le maximum de $\left[\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right]$, alors $x_j = \text{sgn}(a_{ij})$, on voit que $\|A\|_\infty \geq \max_{1 \leq i \leq n} \left[\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right]$; d'où l'égalité demandée.

④ On a trivialement que $\|A\|_E = 0$ si et seulement si $A = 0$ et que $\|\lambda A\|_E = |\lambda| \|A\|_E$ quel que soit λ appartenant à $\mathbb{R}$. Pour prouver la troisième propriété, on se sert de l'inégalité de Minkowski, qui nous dit que :

$$\left(\sum_{i,j} a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i,j} b_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \geq \left(\sum_{i,j} (a_{ij} + b_{ij})^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Le coefficient à la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne de $A^t A$, que l'on note c_{ij} , est égal à $\sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj}$; par conséquent, $\text{tr}(A^t A) = \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i,k} a_{ki}^2$, d'où l'expression demandée.

Cette norme ne peut pas être subordonnée, parce que, si I désigne la matrice identité, on a trivialement : $\|I\|_E = \sqrt{n}$, alors que pour toute norme subordonnée, on doit avoir $\|I\| = 1$.

PARTIE n° 2

① Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $(A + \Delta A)x = 0$. On doit alors avoir : $x = -A^{-1}\Delta Ax$. Mais, si $x \neq 0$, on aurait $\|A^{-1}\Delta Ax\| \leq \|A^{-1}\| \|\Delta A\| \|x\| < \|x\|$ ce qui implique une contradiction.

② ① x et Δx existent puisque A et $A + \Delta A$ sont inversibles.

② D'après la question 2 de la première partie, on doit avoir $\chi(A) \geq \|I\| = 1$.

③ On a $A\Delta x + \Delta Ax + \Delta A\Delta x = \Delta b$, ce qui implique : $\Delta x = A^{-1}(\Delta b - \Delta Ax - \Delta A\Delta x)$. Par conséquent, $\|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\| (\|\Delta A\| \|\Delta x\| + \|\Delta A\| \|x\| + \|\Delta b\|)$.

Puisque $Ax = b$, on doit avoir $\frac{\|A\| \|x\|}{\|b\|} \geq 1$. On a donc :

$\|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\| \left(\|\Delta A\| \|\Delta x\| + \|\Delta A\| \|x\| + \frac{\|A\| \|x\|}{\|b\|} \|\Delta b\| \right)$; cette dernière expression est clairement équivalente à celle qui est demandée.

Cette inégalité permet de majorer l'erreur relative $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}$, à partir des bornes relatives imposées a priori sur b et A . Plus $\frac{\chi(A)}{1 - \chi(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}$ est petit, plus l'erreur

relative est faible. Or, pour $\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$ fixé, $\frac{\chi(A)}{1 - \chi(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}$ est une fonction croissante du

coefficient de conditionnement de A . Il est donc préférable d'avoir une matrice au coefficient de conditionnement faible, et donc le plus proche de 1 possible.

PARTIE n° 3

❶ Les solutions sont $(1,1,1,1)$, $(9.2, -12.6, 4.5, -1.1)$ et $(-81, 137, -34, 22)$ respectivement.

❷ Pour la norme $\|\cdot\|_2$, on a $\|A\|_2 = 30.2887$, $\chi(A) = 2984$, $\|b\|_2 = 60.0249$, $\|x\|_2 = 2$. Dans le second système, on a $\|\Delta b\|_2 = 0.2$, $\|\Delta A\|_2 = 0$ et $\|\Delta x\|_2 = 16.3969$ (par rapport au premier système). On vérifie alors aisément la majoration demandée.