

SESSION
D'AVRIL
2000

**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN**

AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

OPTION ECONOMIE

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

L'épreuve est composée de 5 exercices indépendants qui peuvent donc être traités dans un ordre quelconque.

EXERCICE n° 1

En posant $X = x + \frac{1}{x}$, résoudre dans IR l'équation

$$x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 5x + 1 = 0$$

EXERCICE n° 2

On considère la fonction définie par $f(x) = x^2(2\ln x - 1)$

- ❶ Quel est son domaine de définition ?
- ❷ Trouver la limite de $f(x)$ lorsque $x \rightarrow 0$ et $x \rightarrow +\infty$
- ❸ Pour quelle valeur non nulle f admet-elle un minimum ?
- ❹ Calculer $I = \int_0^1 x \ln x \, dx$

EXERCICE n° 3

On répartit 784 pièces de 1 franc en petits tas de la façon suivante :

- le premier tas se réduit à 1 pièce de 1 franc,
- le second tas compte 3 pièces de 1 franc,
- le troisième tas en compte 5,
- et ainsi de suite.

Ensuite, on remet chaque tas à des joueurs par ordre de mérite croissant. Le moins méritant prend le premier tas (1 pièce de 1 franc), le second les deux tas suivants (soit 3 et 5 pièces de 1 franc), le troisième les trois tas suivants (soit 7, 9 et 11 pièces de 1 franc), ainsi de suite. Tous furent ainsi servis et il ne resta rien. Combien de tas et de joueurs y avait-il ?

EXERCICE n° 4

Etudier la convergence dans $\mathbb{R}$ de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2, \text{ selon la valeur de } u_0$$

EXERCICE n° 5

Soit (u_n) , (v_n) , (w_n) , $n \in \mathbb{N}$, trois suites réelles vérifiant le système suivant :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = 2v_n + w_n \\ w_{n+1} = w_n \end{cases}$$

où u_0, v_0, w_0 sont des valeurs réelles quelconque données.

❶ Ecrire le système précédent sous forme matricielle $U_{n+1} = AU_n$

où $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et A est une matrice que l'on déterminera.

❷ Déterminer les valeurs propres de A et les sous-espaces propres associés. La matrice A est-elle diagonalisable ?

❸ Résoudre le système en déterminant d'abord la solution (w_n) $n \in \mathbb{N}$.

❹ Ecrire explicitement A^n , pour $n=2$.

**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN**

AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

OPTION ECONOMIE

COMPOSITION D'ECONOMIE

DUREE : 4 HEURES

N.B. : Le candidat traitera l'un des deux sujets, au choix.

SUJET N° 1

Après avoir rappelé les arguments montrant que la concurrence des pays à bas salaires crée du chômage dans les pays industrialisés, vous présenterez les insuffisances de cette analyse et vous indiquerez les avantages pour la communauté internationale d'une insertion des pays en développement dans le commerce mondial.

N.B. : Dans l'équilibre de ces réponses, le candidat devra observer le barème.

SUJET N° 2

MICROECONOMIE

EXERCICE : 7 points.

On étudie le comportement d'une compagnie aérienne sur deux lignes de son réseau : Paris - Bangui (ligne A) et Paris - Yaoundé (ligne B).
On suppose que sur chacune de ces deux lignes la compagnie est en situation de monopole.

Une étude de trafic a mis évidence la relation suivante :

$$Q = - 4P + 18004$$

Avec, dans un premier temps, Q représentant le nombre total de passagers sur les deux lignes et P , un prix unique sur les deux lignes.

L'analyse des charges d'exploitation fait apparaître une fonction de coût total :

$$CT = 1/5 Q^2 + Q + 11\,000\,000$$

❶ Après avoir donné l'expression mathématique de la recette moyenne R_m , de la recette marginale R_m , du coût moyen C_m et du coût marginal C_m , vous indiquerez la signification qu'il convient de donner ici au coût marginal.

❷ Représentez sur un graphique les courbes permettant de faire apparaître l'équilibre prix quantité lorsque la compagnie maximise son profit.

❸ Une commission de contrôle relève que le prix du billet a été fixé à $P = 2250\text{F}50$ et décide d'attaquer la compagnie avec l'argument « à ce prix, on maximise le chiffre d'affaires sans tenir compte des coûts ». Que pensez-vous de cet argument ?

❹ La commission impose la tarification au coût marginal. Quel est alors le prix de vente du billet et le nombre de voyageurs ? Après avoir défini la notion de surplus du consommateur, vous calculerez sa valeur.

❺ Afin de réagir, le PDG de la compagnie demande à ces services d'affiner les études de trafic. Des fonctions de demande spécifiques à chaque ligne sont alors mises en évidence :

$$\text{Ligne A : } Q_A = -3P_A + 12\,003$$

$$\text{Ligne B : } Q_B = - P_B + 6\,001$$

Si $P_A = P_B = 3\,000\text{ F}$, quelle clientèle (A ou B) a l'élasticité-prix directe la plus élevée en valeur absolue ? A ce prix, si la compagnie baisse le tarif de vol de 1 %, sur quelle ligne le taux de croissance du trafic sera le plus élevé ?

QUESTION : 3 points.

L'arbitrage intertemporel du consommateur.

MACROECONOMIE

EXERCICE : 7 points.

Une économie a les caractéristiques suivantes :

Fonction de consommation de l'ensemble des ménages : $C = 0,8Y_d + 500$, où Y_d est le revenu disponible, c'est à dire le revenu Y diminué des impôts T ;

Fonction d'investissement privé : $I = 0,1Y_d - 10\,000i + 200$, i étant le taux d'intérêt ;

Importations : $M = 0,1Y_d$;

Les exportations sont exogènes et égales à $X = 1000$;

Demande d'encaisse de transaction : $M_{dt} = 0,16Y$;

Demande d'encaisse de spéculation : $M_{ds} = -2000i + 500$;

La masse monétaire en circulation est égale à $M_0 = 1000$.

❶ On suppose tout d'abord que l'Etat finance ses dépenses par un impôt proportionnel au revenu, $T = 0,20Y$, l'équilibre budgétaire étant respecté. Déterminer alors toutes les grandeurs macroéconomiques en passant par l'intermédiaires des courbes $IS = LM$

❷ Le produit national de plein emploi étant de 5 000, on se fixe comme objectif d'atteindre ce produit :

Donner quelques mesures à prendre pour cet objectif ;

Finalement, le gouvernement se décide à accepter un déficit budgétaire. De quel montant doit-il être ?

QUESTION : 3 points.

Le chômage conjoncturel (définition, explications, politiques de lutte).

**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN**

AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

OPTION ECONOMIE

COMPOSITION D'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

DUREE : 2 HEURES

Attention : Une attention particulière sera portée sur les commentaires.

Il est proposé d'étudier succinctement l'évolution de l'effectif de la population dans les pays du tiers monde à partir des données suivantes :

Tableau 1

Evolution du taux brut de natalité (TBN)
et du taux brut de mortalité (TBM)

	TBN annuel moyen pour la période en ‰		TBM annuel moyen pour la période en ‰	
	1950-1955	1975-1980	1950-1955	1975-1980
Chine	39,8	21,3	20,1	7,4
Inde	42,0	35,3	26,6	15,1
Kenya	49,2	53,8	26,6	14,1
Ensemble des pays en voie de développement ..	42,9	33,0	23,2	12,1

Source : Revue Tiers Monde, 1983.

Tableau 2

Evolution de la population (en millions d'habitants)

	Population constatée	Population projetée	
	1982	1990	2000
Chine	1 008	1 094	1 196
Inde	717	844	994
Kenya	18	26	40

Source : Banque mondiale: rapport sur le développement dans le monde 1984.

Question 1 :

Est d'abord examiné le mouvement naturel dans l'ensemble des pays.

a) Calculez, pour les pays en voie de développement, le taux d'accroissement annuel moyen pour la période 1950-1955 puis pour la période 1975-1980 après avoir rappelé la définition du taux d'accroissement naturel.

b) Commentez brièvement l'évolution constatée.

Question 2 :

Est maintenant observé le mouvement naturel en Chine, en Inde et au Kenya.

Calculez pour chaque pays, le taux d'accroissement naturel annuel moyen pour la période 1950-1955 et pour la période 1975-1980. Commentez.

Question 3 :

Est enfin envisagée l'évolution future de l'effectif de la population en Chine, en Inde et au Kenya

- a) Outre la natalité et la mortalité, quelles autres composantes interviennent dans l'évolution démographique d'une population ?
- b) En supposant le maintien dans le futur du taux d'accroissement naturel annuel moyen constaté dans la période 1975-1980 et l'absence de mouvement migratoire :
 - Calculez le temps de doublement de la population de chacun des 3 pays.
 - Calculez l'effectif de la population de chaque pays en 1990 et en 2000 en prenant comme population de départ l'effectif constaté en 1982 ; comparez pour chaque pays ces résultats avec les populations projetées du tableau 2 et commentez.

RAPPEL DE COURS
Mouvement général d'une population

I - Accroissement naturel

Pour une population fermée, c'est-à-dire sans apports ni pertes extérieurs, l'accroissement de la population se juge à la différence entre naissances et décès. On l'appelle *accroissement naturel*. Le taux d'accroissement naturel (annuel par exemple) s'obtient en rapportant cet accroissement à l'ensemble de la population. C'est la différence entre le taux de natalité et le taux de mortalité.

Au cours d'une période donnée, une population fermée se modifie de trois façons :

- a) Naissance d'enfants (d'âge zéro) ;
- b) Décès de personnes de divers âges ;
- c) Vieillissement de chaque individu.

Le taux d'accroissement naturel ne tient compte que des deux premiers phénomènes et fait intervenir de même façon le décès d'un adulte, d'un enfant ou d'un vieillard.

De ce fait, ce taux d'accroissement est parfois trompeur. Par exemple, une population composée en grande partie d'adultes peut avoir un taux d'accroissement momentanément positif, alors que sa natalité est insuffisante.

La méthode de la population type est moins recommandable encore que pour la mortalité ou la natalité, car il est utile de juger de façon absolue la vitalité d'une population.

Par contre, la descendance finale nette d'une génération peut être calculée, mais cet indice est très tardif.

II - Taux net de reproduction

Au lieu d'additionner les taux de fécondité à chaque âge (naissances réduites), comme pour le taux brut, ce qui suppose la mortalité nulle, on les applique à une population ayant même composition que la table de survie. On obtient ainsi le taux net de reproduction ou de remplacement du moment.

L'interprétation de ce taux est la suivante : on suit un effectif de 1000 filles à la naissance. Cet effectif est réduit suivant les lois de mortalité de la population considérée, puis obéit également à ses lois de fécondité et donne naissance à un nombre de filles qui n'est autre que le taux de reproduction. Ce taux mesure, en somme, le rapport entre deux générations successives, ou du moins celui que l'on peut attendre, si les conditions restent les mêmes à l'avenir.

Le taux de reproduction a un sens nettement prévisionnel : " Si les taux de fécondité et de mortalité à chaque âge restent ce qu'ils sont, une génération assurera son remplacement à concurrence de $x\%$ ".

Une population peut croître quelque temps, malgré un taux de reproduction inférieur à l'unité (et inversement). Mais, à la longue, la diminution est fatale, sauf allongement illimité suffisant de la vie humaine.

III - Population stable et population stationnaire

Une population fermée dont les taux de fécondité et de mortalité restent invariables à chaque âge tend à la limite vers une composition par âges fixe (Lotka). Cette population limite s'accroît ou diminue à une vitesse constante, tout en restant en quelque sorte semblable à elle-même, c'est-à-dire en ayant toujours même proportion de jeunes, d'adultes, etc. Une telle population est dite stable.

Toute perturbation accidentelle (guerre, épidémie) est peu à peu corrigée, nivelée, par la constance des lois de mortalité et de fécondité, et la tendance reprend vers la même population stable. La composition par âges de celle-ci ne dépend en somme que de ces lois et non de l'état initial ni des accidents temporaires.

Le coefficient d'accroissement (annuel) de la population stable est appelé taux naturel d'accroissement (annuel) de la population. Lorsque ce taux est nul, la population tend vers l'état stationnaire. Une population stationnaire conserve non seulement le même total, mais encore sa composition par âges. Celle-ci est identique à la table de survie.

Taux de Lotka et taux net de reproduction sont d'ailleurs étroitement apparentés. Toutefois, l'un est annuel et l'autre lié à l'intervalle de deux générations.

L'intervalle de deux générations est l'âge moyen des parents (de la mère, dans la plupart des calculs) au moment de la naissance. Si on appelle n cet intervalle, on a la relation approximative suivante :

$$t = (L + r)^n$$

t : taux net de reproduction

r : taux de Lotka

formule identique à celle du taux d'intérêt composé.

Les deux taux peuvent se calculer séparément pour chaque sexe. Le plus souvent, les calculs sont faits sur la population féminine.

Le taux de Lotka et le taux de reproduction net présentent les mêmes inconvénients que le taux brut de reproduction : ils ne tiennent pas compte de la nuptialité et perdent une partie de leur signification pour les populations qui ont connu des perturbations (guerre, dépression économique, etc...) sur leur fécondité.

Ils présentent néanmoins une grande importance, en particulier pour les pays peu développés.

Des populations stationnaires ne peuvent pas exister tant que la mortalité diminue. Par contre, on trouve dans le monde des populations relativement stables, du fait de la constance de leur taux de natalité.

La notion de population "quasi stable" (Bourgeois-Pichat) facilite l'étude des populations de ces pays, généralement dans les pays peu évolués démographiquement.

Une population dont la mortalité diminue augmente ou vieillit.

IV - Migrations et population ouverte

Les migrations sont moins bien mesurées que les naissances et les décès, en particulier pour l'émigration. On peut les mesurer :

- directement par des relevés appropriés ;
- indirectement par la comparaison de recensements successifs.

On peut, comme pour les naissances et les décès, calculer des taux par 1000 habitants. La notion de migrations peut être étendue à des populations ne couvrant pas tout un territoire, par exemple la population active, ou encore la population adulte. Nous sommes ainsi amenés, de façon plus générale, à étudier les variations d'une "population qui reçoit des apports extérieurs ou qui perd des éléments au profit d'autres populations. Sans entrées, ni sorties, elle est dite fermée.

V- Reconstitution d'une population

L'ensemble des données démographiques d'une population suivie dans le temps est surabondant, car entre elles existent des relations.

De ce fait, lorsque certaines données manquent, il est parfois possible de les calculer en partant des autres.

De même, il existe des moyens techniques de corriger des données inexactes. L'ensemble de ces moyens permet, dans certaines limites, de reconstituer une population, comme Cuvier reconstituait un squelette, en n'en possédant que quelques os.

Ces procédés s'emploient pour les pays peu développés contemporains, ainsi que pour des populations de l'époque préstatistique (méthode Brass, méthode J. Bourgeois-Pichat, etc)

VI - Populations partielles ou sous populations

Toutes les indications et méthodes précédentes peuvent être appliquées à une population vivant dans un espace déterminé. On peut considérer la population scolaire, la population active, la population retraitée, la population médicale, etc..., en remplaçant pour plus de commodité, la notion de naissance par celle d'entrée et la notion de décès par celle de sortie.

Deux populations partielles, ou sous-populations, peuvent être indépendantes l'une de l'autre (cas de deux religions, par exemple, en cas d'absence de mariage mixte) ou en dépendance étroite (populations active ou inactive, par exemple).

**ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE
APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
BP 5084
DAKAR - SENEGAL**

**INSTITUT SOUS REGIONAL DE
STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
YAOUNDE - CAMEROUN**

**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN**

AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIES A et B

ORDRE GENERAL

DUREE : 3 HEURES

Les candidats traiteront l'un des 3 sujets au choix.

SUJET N° 1

«Par quels critères peut-on distinguer une oeuvre d'art d'un objet quelconque ?».

SUJET N° 2

«Est-il facile de penser librement ?».

SUJET N° 3

«La certitude d'avoir raison est-elle un indice suffisant de vérité ?»
(baccalauréat 1994).