CP

UNIVERSITE DE DSCHANG
UNIVERSITY OF DSCHANG
-=-=-=-=-=-

INSTITUT UNIVERSITAIRE
DE TECHNOLOGIE FOTSO VICTOR
-=-=-=-=-=-

REPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix – Travail – Patrie

REPUBLIC OF CAMEROON
Peace – Work – Fatherland

CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE DU CYCLE DE DUT

Septembre 2011

EPREUVE : MATHEMATIQUES (Bacc séries C, D et E) **Durée : 04 heures**

LA FORME

Exercice 1 : (20 pts)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. L'unité graphique étant de 2 cm. On considère les fonctions f et g de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ définies respectivement par

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln x}{1+\ln x} \quad si \quad x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} g(x) = \dfrac{-1}{1+\ln x} \quad si \quad x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

On appelle (C_f) la courbe représentative de f et (C_g) celle de g.

1.1 Déterminer les ensembles de définition de f et de g.

1.2 Etudier la continuité et la dérivabilité de f en O.

1.3 Etudier les variations de f et les résumer sur un tableau.

1.4 a- Déterminer le point d'intersection A de (C_f) avec l'axe des abscisses, puis écrire une équation de la tangente à (C_f) en A.

b- Construire (C_f) avec soin dans l'intervalle $]e^{-1},+\infty[$.

1.5 Montrer que pour tout réel x positif ou nul et différent de e^{-1}, $f(x)-g(x)$ est une constante que l'on calculera.

1.6 Construire alors (C_g) sur $]e^{-1},+\infty[$.

Exercice 2 : (20 pts)

On se propose de résoudre l'équation différentielle $(E) : 9y'' + 6y' + y = (x+1)e^{-x}$.

2.1-a Résoudre l'équation différentielle $(E') : 9y'' + 6y' + y = 0$ dans laquelle y est une fonction numérique d'une variable réelle deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$.

b- Déterminer la solution de (E') dont la courbe intégrale passe par le point $A(3, 2/e)$ et admet une tangente horizontale au point d'abscisse 4.

2.2 Soient a et b deux réels, u une fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $u(x) = (ax+b)e^{-x}$. Déterminer a et b pour que u soit solution de (E)

2.3- a Montrer que v est solution de (E) si et seulement si $v-u$ est une solution de (E').

b- En déduire les solutions de (E).

Exercice 3 : (20 pts)

On se propose de déterminer la valeur de $\pi/2$ à l'aide de l'intégrale suivante :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$

3.1 Calculer I_0 et I_1.

3.2 Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

3.3 Déterminer I_{n-2} en fonction de I_{n-4} et donner la relation de récurrence entre I_n et I_{n-4}.

3.4En supposant que n est un entier naturel pair ou impair ($\forall m \in \mathbb{Z}, n = 2m \ ou \ n = 2m+1$)

a- Déterminer I_{2m} en fonction de m et de I_0

b- Déterminer I_{2m+1} en fonction de m et de I_1

c- Démontrer que : $\lim_{n \to \infty} \frac{I_{2m}}{I_{2m+1}} = 1$

3.5 En déduire la formule de Vallice qui donne la valeur de $\pi/2$ comme un produit infini des termes.

Exercice 4 : (20 pts)

3.1 On considère dans le repère canonique la courbe d'équation

$$25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$$

Déterminer sa nature, puis tracer cette courbe en précisant le centre et l'excentricité.

3.2 On considère la courbe d'équation

$$3x^2 + 4xy - 12x + 16 = 0$$

dans le repère canonique. Montrer (avec le moins de calculs possibles) que cette courbe est une hyperbole dont on précisera les demi-axes ainsi que le centre.

Exercice 5 : (20 pts)

Une urne A contient trois boules : une rouge, une bleue et une noire. Une urne B contient trois boules : une rouge et deux noires. Une urne C contient trois boules : deux bleues et une noire. On tire une boule, au hasard, de chaque urne. On suppose que, dans chaque urne, les tirages sont équiprobables.

5.1. a) Quelle est la probabilité p_0 de n'obtenir aucune boule noire ?

b) Quelle est la probabilité p_1 d'obtenir exactement une boule noire ?

c) Quelle est la probabilité p_2 d'obtenir exactement deux boules noires ?

d) Quelle est la probabilité p_3 d'obtenir trois boules noires ?

5.2. Si on tire exactement une boule noire, on perd un point. Si on tire zéro ou deux boules noires, on gagne zéro point. Si on tire trois boules noires, on gagne trois points.

5.2a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui à tout tirage associe le gain réalisé ?

5.2b) Calculer l'espérance mathématique de X. La règle du jeu est-elle favorable au joueur ?