

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

PROBLEME I

1 - En effectuant dans J_n le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - x$; $du = -dx$, on a

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cdot dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n \left(\frac{\pi}{2} - u \right) \cdot du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n u \cdot du = I_n \quad \text{C.Q.F.D.}$$

2 - Soit $\alpha \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right]$, $0 \leq I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}} \sin^n x \cdot dx + \int_{\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cdot dx$

$x \rightarrow \sin^n x$ est croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2} \right]$ donc :

$$0 \leq I_n \leq \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) \sin^n \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) + \int_{\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cdot dx \leq \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) \sin^n \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) + \frac{\alpha}{2} \text{ en majorant le sinus par}$$

1 dans la deuxième intégrale.

Or, $0 \leq \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^n \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) = 0 \Rightarrow \exists M \in \mathbb{N} / \forall n \geq M, \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) \sin^n \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) \leq \frac{\alpha}{2}$

donc $\forall n \geq M, I_n \leq \alpha$ c'est-à-dire $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ C.Q.F.D.

3 - A l'aide d'une intégration par parties, on obtient :

$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x \times \sin x \cdot dx = \left[-\cos x \cdot \sin^{n+1} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1) \cdot \cos x \cdot \sin^n x \cdot \cos x \cdot dx = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cdot \cos^2 x \cdot dx$$

d'où $I_{n+2} = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cdot (1 - \sin^2 x) dx = (n+1) I_n - (n+1) I_{n+2} \Rightarrow (n+2) I_{n+2} = (n+1) I_n$

4 -

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot dx = 1$$

Si n est pair alors $n=2p$ et on a

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2} = \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2(p-1)} I_{2p-4} = \frac{(2p-1) \times (2p-3) \times \dots \times 1}{2p \times 2(p-1) \times \dots \times 2} \times I_0$$

Soit, en multipliant le numérateur par $(2p) \cdot (2p-2) \cdot \dots \cdot 2$ le numérateur devient alors $(2p)!$ et le dénominateur $(2p \cdot 2(p-1) \cdot \dots \cdot 2)^2 = (2^p \cdot p!)^2$ donc

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

De même, on a $I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} I_{2p-1} = \dots = \frac{2p \times 2(p-1) \times \dots \times 2}{(2p+1) \times (2p-1) \times \dots \times 1} I_1$ soit :

$$I_{2p+1} = \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!}$$

5 - pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ on a :

$$(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n \Rightarrow (n+2)I_{n+2}I_{n+1} = (n+1)I_{n+1}I_n$$

La suite de terme général $(n+1)I_{n+1}I_n$ est donc une constante égale à sa valeur initiale

$$I_1 I_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I_{n+1} I_n = \frac{\pi}{2(n+1)}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Par ailleurs, on a $0 \leq I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n \Rightarrow \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$ Or, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$ (en utilisant la formule

de récurrence entre I_{n+2} et I_n) et donc, d'après le théorème d'encadrement $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$ c'est-à-dire

$$I_{n+1} \approx I_n$$

Donc, $\frac{\pi}{2(n+1)} = I_{n+1} I_n \approx I_n^2 \Rightarrow I_n \approx \sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} \approx \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

6 - $t \rightarrow e^{-t^2}$ étant continue et positive sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall t \geq 1, e^{-t^2} \leq e^{-t}$ et sachant que $t \rightarrow e^{-t}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$ alors $t \rightarrow e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$

Par ailleurs, $e^x > 1 + x$ sur $\mathbb{R}$. On en déduit donc en particulier $\forall t \in [0; \sqrt{n}] 0 \leq 1 - \frac{t^2}{n} \leq e^{-\frac{t^2}{n}}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, 1 + \frac{t^2}{n} \leq e^{\frac{t^2}{n}} \Rightarrow \forall t \in [0; \sqrt{n}] 0 \leq (1 - \frac{t^2}{n})^n \leq e^{-t^2} \text{ et}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, (1 + \frac{t^2}{n})^n \leq e^{t^2} \Leftrightarrow e^{-t^2} \Leftrightarrow e^{-t^2} \leq \frac{1}{(1 + \frac{t^2}{n})^n} \Rightarrow K_n = \int_0^{\sqrt{n}} (1 - \frac{t^2}{n})^n dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt$$

$$\text{En posant } t = \sqrt{n} \sin u \text{ dans } K_n, \text{ il vient : } K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 u)^n \sqrt{n} \cos u du = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^{2n+1} du$$

$$\text{donc d'après ce qui précède } K_n \approx \sqrt{n} \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+2)}} \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$t \rightarrow \frac{1}{(1 + \frac{t^2}{n})^n} \text{ est continue et positive sur } \mathbb{R}^+ \text{ et } \frac{1}{(1 + \frac{t^2}{n})^n} \approx \frac{n^n}{t^{2n}}, \text{ fonction qui est intégrable en } +\infty$$

$$\text{donc } t \rightarrow \frac{1}{(1 + \frac{t^2}{n})^n} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}^+$$

$$\text{D'où } e^{-t^2} \leq \frac{1}{(1 + \frac{t^2}{n})^n} \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \leq \int_0^{+\infty} (1 + \frac{t^2}{n})^{-n} dt = l_n$$

$$\text{En effectuant dans } l_n \text{ le changement de variable } t = \sqrt{n} \tan u, dt = \frac{\sqrt{n}}{\cos^2 u} du, \text{ il vient}$$

$$l_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1 + \tan^2 u)^n} \frac{\sqrt{n} du}{\cos^2 u} = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^{2n-1} du \approx \sqrt{n} \sqrt{\frac{\pi}{2(2n-1)}} \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ donc}$$

$$K_n \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \leq l_n, \text{ le théorème d'encadrement donne alors :}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

PROBLEME II

1 - Soit (x, y) élément de $\mathbb{R}^2$ tel que $f(x)=f(y)$ alors on a $|x - y| \leq |f(x) - f(y)| = 0$ donc $x = y$.

Donc f est injective, comme elle est continue et définie sur un intervalle, elle est strictement monotone.

2 - La fonction f étant croissante on sait que soit f a une limite en $+\infty$ soit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Supposons que f converge vers une limite l réelle

Soit x un réel, alors on a $|f(x+1) - f(x)| \geq |x+1 - x| = 1$

En passant à la limite dans cette inéquation on obtient $0 = l - l \geq 1$ ce qui est faux donc il y a contradiction

avec l'hypothèse et par conséquent $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Le même type de raisonnement tenu en $-\infty$ donne $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

On en déduit que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et que f est bijective

3 -

a- On a donc $f(a) \geq a$ et $f(b) \leq b$

Soit g l'application définie sur $[a, b]$ telle que $g(x) = f(x) - x$

g est continue, $g(a) \geq 0$ et $g(b) \leq 0$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on sait qu'il existe un réel c sur l'intervalle $[a, b]$ tel que $g(c) = 0$ c'est à dire tel que $f(c) = c$ C.Q.F.D.

b- On a, du fait de la croissance de f : $f(c) - f(a) = |f(c) - f(a)| \geq |c - a| = c - a$

Or, $f(c) = c$ donc $f(a) \leq a$ et donc $f(a) = a$

De même, $f(b) - c = f(b) - f(c) = |f(b) - f(c)| \geq |b - c| = b - c \Rightarrow f(b) \geq b$ ce qui entraîne $f(b) = b$

Soit x un élément de $[a, b]$, alors $f(x) - a = |f(x) - f(a)| \geq |x - a| = x - a$ donc $f(x) \geq x$

De même, $b - f(x) = |f(b) - f(x)| \geq |b - x| = b - x$ d'où $f(x) \leq x$

Par conséquent $f(x) = x$ pour tout x de $[a, b]$

c- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = a + b - f(x)$

Dans ces conditions, g est continue et pour tout (x, y) élément de $\mathbb{R}^2$, $|g(x) - g(y)| \geq |x - y|$

Par ailleurs, $a \leq f(x) \leq b \Rightarrow a \leq a + b - f(x) \leq b \Rightarrow g([a, b]) \subset [a, b]$

Cette fonction étant croissante et vérifiant les hypothèses de la question b) on a donc pour tout x de $[a, b]$ $g(x) = x$ soit, pour tout x de $[a, b]$ $f(x) = a + b - x$

4-

a- Soit x un réel strictement positif, alors $f(x) - f(0) = |f(x) - f(0)| \geq |x - 0| = x$ donc

$x + f(0) \leq f(x) < x$

On en déduit que pour tout x strictement positif, $1 + \frac{f(0)}{x} \leq \frac{f(x)}{x} < 1$

D'après le théorème d'encadrement, on a bien $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

Soit (x, y) un élément de $\mathbb{R}^2$, $x \leq y$ alors

$$f(y) - f(x) = |f(y) - f(x)| \geq |y - x| = y - x \Rightarrow f(x) - y \geq f(x) - x$$

On en déduit que la fonction qui à x associe $f(x) - x$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et comme elle est majorée par 0, elle admet donc une limite en $+\infty$

b- Soit x un réel strictement négatif, alors $f(0) - f(x) = |f(0) - f(x)| \geq |0 - x| = -x$ donc $x < f(x) \leq x + f(0)$

On en déduit que pour tout x réel strictement négatif, $1 + \frac{f(0)}{x} \leq \frac{f(x)}{x} < 1$

D'après le théorème d'encadrement $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

Comme précédemment, on montre que la fonction qui à x associe $f(x) - x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est minorée par 0, elle a une limite en $-\infty$

c- Si $A = \emptyset$, alors la fonction qui à x associe $f(x) - x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et comme elle est continue, elle doit rester de signe constant

Donc, pour tout x réel soit $f(x) < x$ (cas a), soit $f(x) > x$ (cas b)

PROBLEME III

1 -

$$b_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x} \sin x \, dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$b_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x} \cdot \sin 2x \, dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx = \frac{4}{\pi} \left([x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx \right) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + [\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = 2 - \frac{4}{\pi}$$

2 -

$$\text{a-} \quad \frac{1}{2} + \sum_{p=1}^n \cos p(x + \pi) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(x + \pi)}{2 \sin \frac{x + \pi}{2}} = (-1)^n \frac{\cos(n + \frac{1}{2})x}{2 \cos \frac{x}{2}}$$

b-

$$\frac{\sin nx}{\sin x} = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x - \frac{x}{2})}{\sin x} = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x \cdot \cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \cdot \cos(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}$$

$$\frac{\sin nx}{\sin x} = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{\cos(n + \frac{1}{2})x}{2 \cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} + \sum_{p=1}^n \cos px - (-1)^n \left(\frac{1}{2} + \sum_{p=1}^n (-1)^p \cdot \cos px \right)$$

$$\frac{\sin nx}{\sin x} = \frac{1}{2} (1 + (-1)^{n+1}) + \sum_{p=1}^n \cos px (1 + (-1)^{n+p+1})$$

c- On a , pour tout entier $p > 0$:

$$I_p = \left(\left[x \frac{\sin px}{p} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin px}{p} dx \right) = \frac{\pi}{2p} \sin p \frac{\pi}{2} + \frac{\cos p \frac{\pi}{2} - 1}{p^2}$$

Si $p=2q$, on a $I_{2q} = \frac{(-1)^q - 1}{4q^2}$

Si $p=2q+1$, $I_{2q+1} = \pi \frac{(-1)^q}{2(2q+1)} - \frac{1}{(2q+1)^2}$

d- On utilise la question b) et on obtient

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \frac{\sin nx}{\sin x} \cdot dx = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{2} (1 + (-1)^{n+1}) dx + \sum_{p=1}^n (1 + (-1)^{n+p+1}) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos px \cdot dx \right)$$

$$b_n = \frac{\pi}{8} (1 + (-1)^{n+1}) + \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^n (1 + (-1)^{n+p+1}) I_p$$

Si $n=2k+1$, $b_{2k+1} = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{2k+1} (1 + (-1)^p) I_p = \frac{\pi}{4} + \frac{4}{\pi} \sum_{q=1}^k I_{2q}$ car $1 + (-1)^p = \begin{cases} 0 & \text{si } p = 2q+1 \\ 2 & \text{si } p = 2q \end{cases}$ et si

Si $n=2k$, $b_{2k} = \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{2k} (1 + (-1)^{p+1}) I_p = \frac{4}{\pi} \sum_{q=0}^{k-1} I_{2q+1}$

3 -

a- La fonction f est dérivable sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$; sa série de Fourier est convergente en tout point x de ces intervalles vers $f(x)$

Au point 0 , f admet une limite à droite : $f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} = 1$ et admet une limite à gauche $f(0^-) = -1$ puisque la fonction est impaire.

De $\frac{f(x) - f(0^+)}{x} = \frac{x - \sin x}{x \cdot \sin x} \approx \frac{\frac{x^3}{6}}{x^2} = \frac{x}{6}$, on déduit que $f'_d(0^+) = 0$

On obtient facilement que $f'_d(0^-) = 0$ pour des raisons de symétrie.

Alors, la série de Fourier converge vers $\frac{1}{2}(f(0^+) + f(0^-)) = 0$

Au point $\frac{\pi}{2}$, on a $f(\frac{\pi^+}{2}) = 0$; $f(\frac{\pi^-}{2}) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{x}{\sin x} = \frac{\pi}{2}$; $f'_g(\frac{\pi^-}{2}) = 1$; $f'_d(\frac{\pi^+}{2}) = 0$

La série de Fourier converge vers $\frac{1}{2}(0 + \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{4}$

Au point π , aucun problème car la fonction est nulle sur $\left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$

b- On a $\frac{x}{\sin x} = b_1 \sin x + \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k} \sin 2kx + \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k+1} \sin(2k+1)x$ sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

Si $x = \frac{\pi}{2}$, $\sin 2k \frac{\pi}{2} = 0$; il reste $b_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_{2k+1} = \frac{\pi}{4}$

c- (R_k) est une suite positive, décroissante, de limite nulle car c'est le reste d'une série convergente. On a :

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \sum_{k \geq 1} (-1)^k \left(\frac{\pi}{4} + \frac{4}{\pi} \sum_{q=1}^k I_{2q} \right) = \frac{\pi}{4} + \frac{4}{\pi} \sum_{q=1}^k \frac{(-1)^q - 1}{4q^2}$$

$$0 = \sum_{k \geq 1} (-1)^k \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi} \sum_{q=2p+1}^k \frac{-2}{(2p+1)^2} \right) = \sum_{k \geq 1} (-1)^k \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi^2}{8} - \sum_{p=0}^k \frac{1}{(2p+1)^2} \right)$$

$$0 = \sum_{k \geq 1} (-1)^k R_k$$

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

EXERCICE I

On applique la formule de Taylor :

$$\begin{cases} P(X + a_0) = P(X) + \frac{a_0}{1!} P'(X) + \dots + \frac{a_0^n}{n!} P^{(n)}(X) \\ \vdots \\ P(X + a_n) = P(X) + \frac{a_n}{1!} P'(X) + \dots + \frac{a_n^n}{n!} P^{(n)}(X) \end{cases}$$

On sait que les polynômes $P(X), \dots, P^{(n)}(X)$ forment une base de l'espace $R_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré n car ils constituent une famille échelonnée.

Donc $(P(X + a_0), \dots, P(X + a_n))$ forment une base de $R_n[X]$ si et seulement si la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & a_0 & \dots & a_0^n \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$$

est inversible. C'est le cas car son déterminant est un déterminant de Vandermonde (non nul si et seulement si les a_i sont deux à deux distincts).

EXERCICE II

1) Par l'absurde :

si A non inversible, alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ non tous nuls tels que $\lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_n C_n = 0$ (1) où $C_1, \dots, C_n$ sont

les colonnes de A . Il existe i_0 tel que pour tout $j \neq i_0, |\lambda_j| \leq |\lambda_{i_0}|$ (2)

Alors la relation (1) donne $\lambda_1 a_{i_0 1} + \dots + \lambda_{i_0} a_{i_0 i_0} + \dots + \lambda_n a_{i_0 n} = 0$ d'où

$$\lambda_{i_0} a_{i_0 i_0} = - \sum_{j \neq i_0} \lambda_j a_{i_0 j} \Rightarrow |\lambda_{i_0} a_{i_0 i_0}| \leq \sum_{j \neq i_0} |\lambda_j a_{i_0 j}| \leq |\lambda_{i_0}| \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0 j}| \text{ contradiction avec l'hypothèse}$$

$$\forall i, |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|.$$

- 2) On sait que $I, B, \dots, B^{n^2}$ est une famille à $n^2 + 1$ éléments dans l'espace des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes donc elle est liée. Donc il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ non tous nuls tels que $\lambda_0 I + \dots + \lambda_{n^2} B^{n^2} = 0$. Soit k le plus petit entier tel que $\lambda_k \neq 0$ alors $\lambda_k B^k + \dots + \lambda_{n^2} B^{n^2} = 0$. Comme B inversible, on peut multiplier la dernière équation par B^{-k-1} d'où $B^{-1} = -\frac{1}{\lambda_k} (\lambda_{k+1} I + \dots + \lambda_{n^2} B^{n^2-k})$. Ce qu'il fallait démontrer.

3) Soit $J = C(0,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} = C(0,0,1)$

$$C(a,b,c) = aI + bJ + cJ^2$$

$$J^3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -12 \\ 6 & -2 & 36 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix} = -2I + 6J$$

Donc, par récurrence immédiate, $\forall k \in \mathbb{N}, J^k \in \text{Vect}(I, J, J^2)$

Donc comme C^{-1} est un polynôme en J , $C^{-1} \in \text{Vect}(I, J, J^2)$ donc C^{-1} est de la forme cherchée.

PROBLEME

Partie I :

L'espace E est euclidien donc pour toute forme linéaire φ de E , il existe un unique vecteur $v / \forall u \in E, \varphi(u) = \langle u, v \rangle$. Alors pour tout $y \in E, \langle f(u), y \rangle$ est une forme linéaire donc il existe un unique vecteur noté $f^*(y)$ tel que $\langle f(u), y \rangle = \langle u, f^*(y) \rangle$.

Il reste à montrer la linéarité de l'application f^* ainsi définie :

$$\langle x, f^*(y+y') \rangle - \langle f^*(y) + f^*(y'), x \rangle = \langle f(x), y+y' \rangle - \langle f(x), y \rangle - \langle f(x), y' \rangle = 0$$

De même, pour tout a réel et pour tout y , $\langle x, f^*(ay) \rangle - a \langle f^*(y), x \rangle = \langle f(x), ay \rangle - a \langle f(x), y \rangle = 0$.

- 2) si f^* admet comme matrice dans une base orthonormée B alors $(B)_{ij}$ est la composante de $f^*(e_j)$ sur le vecteur e_i i.e. $B_{ij} = \langle e_i, f^*(e_j) \rangle = \langle f(e_j), e_i \rangle = (A)_{ji}$. Où A est la matrice de f dans cette même base orthonormée.

$$\langle x, (f+g)^*(y) \rangle = \langle (f+g)(x), y \rangle = \langle x, (f^*+g^*)(y) \rangle$$

$$3) \langle x, (\lambda f)^*(y) \rangle = \langle \lambda f(x), y \rangle = \langle x, \lambda f^*(y) \rangle$$

$$\langle x, (f \circ g)^*(y) \rangle = \langle (f \circ g)(x), y \rangle = \langle g(x), f^*(y) \rangle = \langle x, g^* \circ f^*(y) \rangle$$

- 4) Si $f(F) \subset F$, $\forall y \in F^\circ, \langle f^*(y), x \rangle = \langle y, f(x) \rangle = 0$ car $f(x) \in F$ donc $f^*(y) \in F^\circ$

Inversement, si F° stable, alors $F^{\circ\circ} (\supset F)$ est stable par $f^{**} = f$ et comme $\begin{cases} E = F \oplus F^\circ \\ E = F^{\circ\circ} \oplus F^{\circ\circ\circ} \end{cases}$ avec l'égalité des dimensions, on a $F = F^{\circ\circ}$

- 6) On sait qu'une matrice et sa transposée ont même polynôme caractéristique. On a montré que la matrice de l'adjoint d'une application dans une base orthonormée est égale à la transposée de cette application d'où la conclusion.

Partie II

- 1) Soit f un endomorphisme normal et soit $P(f) = a_0 + a_1 f + \dots + a_n f^n$ alors il est évident que $P(f) \circ P(f^*) = P(f^*) \circ P(f)$ donc $P(f)$ est normal.
- 2) Pour tous les sous-espaces propres de f endomorphisme normal, il existe un polynôme P tel que ce sev propre est un noyau de $P(f)$ or $P(f)(x) = 0 \Leftrightarrow \langle P(f)(x), P(f)(x) \rangle = 0$ et
- $$\langle P(f)(x), P(f)(x) \rangle = \langle x, P(f^*) \circ P(f)(x) \rangle = \langle x, P(f) \circ P(f^*)(x) \rangle = \langle P(f^*)(x), P(f^*)(x) \rangle$$
- d'où $\langle P(f^*)(x), P(f^*)(x) \rangle = 0$
d'où $P(f^*)(x) = 0$

- 3) Soit x et y tels que $\begin{cases} f(x) = \lambda x \\ f(y) = \mu y, \langle f(x), y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle = \langle x, \mu y \rangle \end{cases}$ d'où $(\lambda - \mu)\langle x, y \rangle = 0$ et comme $\lambda \neq \mu, \langle x, y \rangle = 0$.

- 4), 5) et 6) soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormée de F sous espace stable par f . Complétons cette base par une base orthonormée $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ alors dans cette base la matrice de f peut s'écrire : $\begin{pmatrix} A & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$ donc celle de f^* dans cette même base s'écrit $\begin{pmatrix} {}^t A & 0 \\ {}^t D & {}^t C \end{pmatrix}$. Comme f est normale, matriciellement (1)
- $$A^t A + D^t D = {}^t A A \text{ et } {}^t D D = C^t C + D^t D \text{ alors } (1) \Rightarrow \text{tr}(D^t D) = 0 \Rightarrow \sum_{i,j} d_{ij}^2 = 0 \Rightarrow D = 0.$$

Donc la matrice de f dans la base considérée est $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ et celle de f^* est $\begin{pmatrix} {}^t A & 0 \\ 0 & {}^t C \end{pmatrix}$ avec $A^t A = {}^t A A$ et ${}^t D D = D^t D$ ce qui implique que F et F° sont stables par f et f^* et que les restrictions de f à F et F° sont des endomorphismes normaux.

Partie III

- 1) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrice d'un endomorphisme normal. Alors, $A^t A = {}^t A A \Rightarrow b^2 - c^2 = 0$ et $(a-d)(b-c) = 0$

Si $b = c$ les 2 équations sont vérifiées

$$\text{Si } b \neq c, \begin{cases} a = d \\ b = -c \neq 0 \end{cases}$$

d'où 2 écritures possibles pour A : $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ avec b non nul dans la seconde expression.

Cette seconde expression peut aussi s'écrire $\rho \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ si on pose $a - ib = \rho e^{i\theta}, \theta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

La première expression est celle d'une matrice symétrique donc cette matrice est diagonalisable.

2) Par récurrence sur n dimension de E.*

C'est évident si n=1.

On suppose la propriété vraie au rang n-1.

En dimension n, on sait que f admet un sous espace stable de dimension 1 ou 2. En effet, le polynôme caractéristique de f peut se factoriser en produit de polynômes de degrés 1 ou 2. Si il existe un facteur de degré 1, on a une droite vectorielle stable par f, sinon, on aura un plan vectoriel stable par f.

Soit F un sous-espace stable par f de dimension 1 ou 2 et soit F° son orthogonal dans E. On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence à F et F° : il existe 2 bases orthonormées de F et F° telles que dans chacune de ces bases f a la forme exigée. Il ne reste plus qu'à considérer la base orthonormée constituée de la réunion de chacune de ces bases.

3) Le polynôme caractéristique s'écrit alors : $\chi_A(T) = \prod_i (\lambda_i - T)^{a_i} \prod_j (T^2 - 2\rho_j \cos \theta_j T + \rho_j^2)$

4) A est orthogonalement semblable à

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} & \\ & 0 & & \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ & & & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

CORRIGE DU CALCUL NUMERIQUE

PROBLEME

A)

1) Etude de f

$f(x)$ est définie continue sur $]0, +\infty[$.

Son domaine de définition est donc $D = \mathbb{R}^{+*}$

- Dérivée de $f(x)$

$$f'(x) = (|x \ln x|)'$$

- Si $x > 1$, $|x \ln x| = x \ln x$

$$f'(x) = \ln x + 1 ; f'(x) > 0$$

- Si $0 < x < 1$, $|x \ln x| = -x \ln x$

$$f'(x) = -\ln x - 1 ; f'(x) < 0 \text{ si } x < \frac{1}{e}$$

$$f'(x) > 0 \text{ si } x > \frac{1}{e}$$

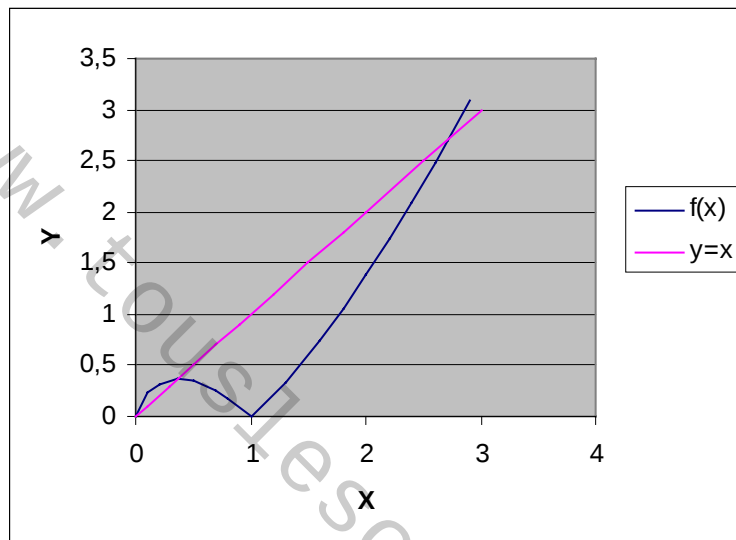
Tableau de variation :

x	0	1/e	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	0	croissante	décroissante	croissante	croissante

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |x \ln x| = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} |x \ln x| = 0$$

Courbe représentative :



- Coordonnées des points (C) $\cap$ (D) :

$$|x \ln x| = x$$

pour $x > 1$, $x \ln x = x$

$$\Leftrightarrow \ln x = 1 \text{ d'où } x = e$$

$\Rightarrow$ Premier point d'intersection : A(e,e)

Pour $0 < x < 1$, $-x \ln x = x$

$$\Leftrightarrow \ln x = -1 \text{ d'où } x = \frac{1}{e}$$

$\Rightarrow$ Deuxième point d'intersection B(1/e, 1/e).

Puisque $f(0) = 0$

$\Rightarrow$ troisième point d'intersection C(0,0).

2° - Montrons que α unique sur $]1, e[$ tel que : $f(\alpha) = \frac{1}{e}$.

Soit $I =]1, e[$

$f(x)$ est continue et strictement croissante sur $]1, e[$,

par conséquent il existe un α unique sur $]1, e[$ tel que : $f(\alpha) = \frac{1}{e}$.

$$f(1) = 0$$

$$f(e) = e \ln e = e$$

$\Rightarrow \forall u \in]0, e[, \exists! a \in I$ tel que $f(a) = u$ (Théorème des valeurs intermédiaires)

Ici, on prend $u = 1/e$

$\Rightarrow \exists! \alpha \in]1, e[$ tel que $f(\alpha) = 1/e$

Déterminons une valeur approchée α , à 10^{-1} près par encadrements successifs :

On a :

$$f(2) = 1,38 > 0,367$$

$$f(1,1) = 0,104 < 0,367$$

$$f(1,5) = 0,608 > 0,367$$

$$f(1,3) = 0,3410 < 0,367$$

$$f(1,4) = 0,47 > 0,367$$

On a donc $\alpha \approx 1,3$

B)

1° Les valeurs de u_0 pour lesquelles (u_n) est constante

Pour que (u_n) soit constante, il faut que $u_1 = f(u_0) = u_0$

On obtient :

$$u_0 = \frac{1}{e}, u_0 = e, u_0 = 0$$

2°

$$u_0 \in]0, 1/e[$$

$$u_{n+1} = f(u_n) = |u_n \ln u_n|, \text{ ici } f(u_n) = -u_n \ln u_n$$

$$u_1 = f(u_0) < 1/e$$

$$u_0 \in]0, 1/e[\text{ et } u_1 \in]0, 1/e[\quad \text{donc cette relation est vraie pour } u_0 \text{ et } u_1,$$

Montrons que si elle est vraie pour u_n elle est vraie pour u_{n+1} .

Supposons $0 < u_n < \frac{1}{e}$

sur $]0, 1/e[$, f est strictement croissante donc

$$f(0) < f(u_n) < f(1/e)$$

$$\Rightarrow 0 < u_{n+1} < |1/e \ln 1/e|$$

$$\Rightarrow 0 < u_{n+1} < 1/e$$

donc si $u_n \in]0, 1/e[$, $u_{n+1} \in]0, 1/e[$ donc $u_n \in]0, 1/e[$.

Donc on vient de montrer que si la relation $0 < u_n < 1/e$ était vraie pour u_n elle était vraie pour u_{n+1} donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = |u_n \ln u_n| - u_n$$

$$\text{or, } 0 < u_n < \frac{1}{e}$$

$$u_{n+1} - u_n = -u_n \ln u_n - u_n = -u_n (\ln u_n + 1)$$

$$-u_n < 0 \text{ et } \ln u_n + 1 < 0 \text{ donc } u_{n+1} - u_n > 0$$

Sur $]0, 1/e[$, (u_n) est croissante et l'on vient de montrer qu'elle est bornée (majorée et minorée) donc elle est convergente et a pour limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{e}$$

3°

$$u_0 \in]1/e, 1[$$

- Encadrement de u_1

$$\frac{1}{e} \langle u_0 \rangle 1$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{1}{e} \langle \ln u_0 \rangle \ln 1$$

$$\Leftrightarrow -u_0 \ln \frac{1}{e} \langle -u_0 \ln u_0 \rangle - u_0 \ln 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \langle u_1 \rangle u_0$$

$$u_0 \in]1/e, 1[, \text{ donc, } u_1 = f(u_0) \in f(]1/e, 1[)$$

$$\text{Sur }]1/e, 1[, f \text{ décroît donc } f(]1/e, 1[) \in]0, 1/e[\text{ donc } u_1 \in]0, 1/e[$$

On se retrouve dès le rang 1 dans le cas précédent, on aura alors u_n tend vers $1/e$.

$$4) \quad u_0 = 1$$

$$\Rightarrow f(u_0) = f(1) = 0$$

La suite est « constante » si on pose par prolongement $f(0) = 0$.

5)

$$u_0 \in]1, \alpha[\quad F(\alpha) = 1/e$$

f croît ainsi que u_n

$$u_1 \in f(]1, \alpha[) = [0, 1/e]$$

On se ramène au cas n°1 et u_n a pour limite $1/e$.

6)

$$u_1 \in f([\alpha, e]) =]1/e, e[$$

Si $u_1 \in]1/e, 1[$ alors u_n tend vers $1/e$

Si $u_1 \in]1, e[$, $u_1 < e$

Si $\forall n, u_n < e$, $u_{n+1} = f(u_n) < e$ oui car

- si $u_n \in]0, \alpha[$, $f(u_n) < 1/e < e$

- si $u_n \in]\alpha, e[$, on revient au cas

$u_0 \in]\alpha, e[$ et $u_1 < e$
donc $0 < u_n < e$

Montrons que $u_1 < u_0$

Montrons donc que $f(u_0) < u_0$ sur $]\alpha, e[$

$$f(u_0) = u_0 \ln u_0$$

$$u_0 \in]\alpha, e[\Rightarrow \frac{f(u_0)}{u_0} = \ln u_0 < \ln e < 1 \text{ donc } f(u_0) < u_0 \text{ donc } u_1 < u_0.$$

$$u_0 \in]\alpha, e[\Rightarrow u_1 \in]1/e, e[$$

Si $u_1 \in]1/e, 1[$, alors u_n tend vers $1/e$, cela nous ramène au cas 1.

Si $u_1 \in]1, \alpha[$, alors u_n tend vers $1/e$, cela nous ramène au cas 1.

Si $u_1 \in]\alpha, e[$, alors $u_2 < u_1 \dots$

Par récurrence, si $\exists n$ tel que $u_n \in]1/e, \alpha[$, u_n tend vers $1/e$

si $\forall n, u_n \in]\alpha, e[$, la suite est bornée décroissante donc elle converge.

La seule limite possible est $l = 1/e$

(La suite sort de $]\alpha, e[$ à partir d'un certain rang.

7) $u_0 > e$

Montrons que $u_{n+1} - u_n \geq 2(u_n - u_{n-1})$

$$\Leftrightarrow f(u_n) - f(u_{n-1}) \geq 2(u_n - u_{n-1})$$

$$\Leftrightarrow f(u_n) - 2u_n \geq f(u_{n-1}) - 2u_{n-1}$$

Or $u_n > u_{n-1}$ car la suite est croissante.

Montrons que $f(u) - 2u$ croît sur $]e, +\infty[$

$$f(u) - 2u = u \ln u - 2u = u(\ln u - 2) = \ln u - 2 + 1 = \ln u - 1$$

$$f'(u) > 0 \quad \text{si} \quad \ln u > 1 \quad \text{donc si} \quad u > e$$

Donc, $\forall u > e$, $f(u) - 2u$ est croissante

Donc $u_{n+1} - u_n \geq 2(u_n - u_{n-1})$ (cqfd)

Notons $v_n = u_n - u_{n-1}$ $v_n > 0$, $\forall n$

On a montré que $v_{n+1} \geq 2v_n$

$\Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} \geq 2$, c'est une suite de termes positifs, croissante, non bornée donc divergente.

EXERCICE

1)

- Si A et B sont inversibles alors, il existe A^{-1} et B^{-1} tels que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$
 et $BB^{-1} = B^{-1}B = I$.
 $\Rightarrow AB * B^{-1} * A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$, donc AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

- Si AB inversible alors il existe $(AB)^{-1}$ tel que : $AB * (AB)^{-1} = (AB)^{-1} * AB = I$
 $\Rightarrow AB * B^{-1} * A^{-1} = AA^{-1} = I$, avec $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Donc A est inversible si (AB) est inversible avec $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

La démonstration est identique pour B.

2) $(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p$

A est inversible si A^p est inversible

1) Supposons A inversible, donc $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

Soit $A^p = A * A * \dots * A$ (p fois)
 $A^p * (A^p)^{-1} = (A * A * \dots * A) * (A^{-1} * A^{-1} * \dots * A^{-1})$
 (p fois) (p fois)

Par associativité des matrices, on obtient :

$A^p * (A^p)^{-1} = (A * A * \dots * (A * A^{-1}) * A^{-1} * \dots * A^{-1})$
 $= A^{p-1} (AA^{-1}) (A^{p-1})^{-1} = A^{p-1} I (A^{p-1})^{-1}$
 et de proche en proche $AA^{-1} = I$

donc $A^p * (A^p)^{-1} = I$, donc A^p est inversible.

Comme l'inverse d'une matrice est unique, on a, $A^p * (A^p)^{-1} = A^p * (A^{-1})^p = I$

Donc $(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p$

2) Supposons A^p inversible, alors $A^{p*}(A^p)^{-1}=(A^p)^{-1}*A^p=I$
 Montrons que si A^p inversible, A^{p+1} inversible

Developpons $A^{p*}(A^p)^{-1}$

$$A^{p+1}*(A^{p+1})^{-1}=AA^p*(A^p)^{-1}A^{-1}=AA^p*(A^{-1})^pA^{-1}=A(\underbrace{A*A*.....*A}_{(p \text{ fois})})*(A^{-1}*\underbrace{A^{-1}*.....*A^{-1}}_{(p \text{ fois})})A^{-1}=I$$

$$\Rightarrow \underbrace{(A^*A^*A^*....^*A)^*}_{(p+1 \text{ fois})} \underbrace{(A^{-1}*A^{-1}*....*A^{-1}*A^{-1})}_{(p+1 \text{ fois})} = A^{p+1}*(A^{p+1})^{-1} = I$$

Si A^p est inversible, alors A^{p+1} est inversible donc c'est vrai pour tout p , c'est vrai pour $p=1$ donc A est inversible.

Donc A^p est inversible, ainsi que A .

Et pour que A soit inversible, il faut que A^p , $p \in \mathbb{N}^*$ soit inversible.

3)

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta + \sin \theta \cos \theta & 0 \\ -\sin \theta \cos \theta - \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Supposons :

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta & 0 \\ -\sin n\theta & \cos n\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et démontrons que A^{n+1} vraie

$$A^{n+1} = A^n * A = \begin{pmatrix} \cos n\theta \cos \theta - \sin \theta \sin n\theta & \cos n\theta \sin \theta + \sin n\theta \cos \theta & 0 \\ -\sin n\theta \cos \theta - \sin \theta \cos n\theta & -\sin n\theta \sin \theta + \cos n\theta \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Or $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

donc $\cos(n\theta + \theta) = \cos(n+1)\theta = \cos n\theta \cos \theta - \sin \theta \sin n\theta$

de même,

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$ donc,

$\sin(n\theta + \theta) = \sin(n+1)\theta = \sin \theta \cos n\theta + \sin n\theta \cos \theta$

donc

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} \cos(n+1)\theta & \sin(n+1)\theta & 0 \\ -\sin(n+1)\theta & \cos(n+1)\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc A^n est vrai.

4)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{car} \quad \begin{pmatrix} \cos(-\theta) = \cos \theta \\ \sin(-\theta) = -\sin \theta \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta + \sin \theta \cos \theta & 0 \\ -\sin \theta \cos \theta + \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

5) Si $(A^n)^{-1}$ existe, alors $(A^n)(A^n)^{-1} = I$

$$(A^1)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Admettons $(A^n)^{-1}$

$$(A^n)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta & 0 \\ \sin n\theta & \cos n\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et démontrons } (A^{n+1})^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(n+1)\theta & -\sin(n+1)\theta & 0 \\ \sin(n+1)\theta & \cos(n+1)\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A^{n+1})^{-1} = (A^n * A^1)^{-1} = A^{-1} * (A^n)^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta & 0 \\ \sin n\theta & \cos n\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} \cos \theta \cos n\theta - \sin \theta \sin n\theta & -\cos \theta \sin n\theta - \sin \theta \cos n\theta & 0 \\ \sin \theta \cos n\theta + \sin n\theta \cos \theta & -\sin \theta \sin n\theta + \cos n\theta \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos(n+1)\theta & -\sin(n+1)\theta & 0 \\ \sin(n+1)\theta & \cos(n+1)\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ donc } (A^n)^{-1} \text{ est vraie.}
 \end{aligned}$$

Si $(A^n)^{-1}$ existe alors $(A^n) * (A^n)^{-1} = I$

Vérification :

$$(A^n) * (A^n)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta & 0 \\ -\sin n\theta & \cos n\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta & 0 \\ \sin n\theta & \cos n\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2 n\theta + \sin^2 n\theta & -\cos n\theta \sin n\theta + \sin n\theta \cos n\theta & 0 \\ -\sin n\theta \cos n\theta + \sin n\theta \cos n\theta & \cos^2 n\theta + \sin^2 n\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

donc $(A^n)^{-1}$ existe.