

**CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES  
AVRIL 1999**

**CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES**

**OPTION MATHEMATIQUES**

**VOIE B**

\*

\* \*

**PROBLEME n° 1**

❶ On peut utiliser le critère de convergence de Cauchy :  $\left(\frac{1}{ke^k}\right)^{\frac{1}{k}} \rightarrow \frac{1}{e} < 1$

ce qui prouve la convergence de la série

Par ailleurs, en utilisant le développement en série de  $\ln(1-x)$ , il vient aisément que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(e^{-1})^k}{k} = -\ln(1 - e^{-1}) = 1 - \ln(e - 1)$$

❷ ① On a :  $A_1 = \int_1^e \left( \int_{\ln x}^{2 \ln x} 1 dy \right) dx = [x \ln x - x]_1^e = 1$  C.Q.F.D.

Voir la représentation du domaine  $D_1$  ci-dessous.

$$② A_k = \int_1^{e^k} \left( \int_{\ln x}^{2 \ln x} 1 dy \right) dx = [x \ln x - x]_1^{e^k} = 1 + e^k (k - 1)$$

③  $A_k^{-1} \approx \frac{1}{ke^k}$  d'où la convergence de la série d'après 1-

**PROBLEME n° 2**

$$\textcircled{1} \quad \textcircled{1} \quad u_n = a \left( 1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) + b \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \right) + c \left( 1 - \frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)$$

$$= a + c + \frac{b}{n} + \left( -\frac{a}{2n^2} - \frac{c}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)$$

→ Si  $a+c$  est différent de 0, le terme général ne tend pas vers 0 et la série diverge

→ Si  $a+c=0$ ,  $u_n \approx \frac{b}{n}$  et la série diverge si  $b$  différent de 0

→ Si  $a+c=0$  et  $b=0$  la série est convergente car  $u_n \approx \frac{K}{n^2}$

$$\textcircled{2} \quad S_n = \sum_1^n u_p = a \left( \left( \cos 1 - \cos \frac{1}{2} \right) + \dots + \left( \cos \frac{1}{n} - \cos \frac{1}{n+1} \right) \right) = a \left( \cos 1 - \cos \frac{1}{n+1} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = a(\cos 1 - 1)$$

C.Q.F.D.

$$\textcircled{2} \quad |u_n| = \sin \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \text{ décroît quand } n \text{ augmente puisque } \sin x \text{ est croissante.}$$

$|u_n| \rightarrow 0$  lorsque  $n$  tend vers l'infini  
et  $\sum$  une série alternée.

Il s'agit donc d'une série convergente mais semi-convergente car  $|u_n| \approx \frac{1}{n^{1/2}}$  qui est le terme général d'une série de Riemann divergente.

$\textcircled{3} \quad \textcircled{1}$  Utilisons le théorème de d'Alembert :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = |x| \text{ et donc } R=1$$

② si  $x=1$   $u_n = \frac{1}{2n+1}$  et la série est divergente car équivalente à une série harmonique

si  $x=-1$   $u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$  est le terme général d'une série alternée dont la valeur absolue tend vers 0 en décroissant et la série est alors convergente.

④ ①  $n^{1/n^\alpha} = e^{\frac{1}{n^\alpha} \ln n}$

Or,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^\alpha} \ln n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n^\alpha} \ln n} = 1$

Par conséquent,  $|u_n| \approx \frac{1}{n}$  qui est le terme général de la série harmonique divergente

②  $f(x) = e^{-\left(1+\frac{1}{x^\alpha}\right) \ln x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{f(x)}{x} \left(1 + \frac{1}{x^\alpha} (1 - \alpha \ln x)\right) < 0$  ce qui prouve la

décroissance de la fonction donc aussi celle de la suite vers 0 et la série alternée est donc convergente.

### PROBLEME n° 3

① La fonction  $\varphi: t \rightarrow \frac{\sin t}{t}$  définie si  $t$  différent de 0 est prolongeable par continuité en 0 en posant  $\varphi(0) = 1$ . Donc l'intégrale est définie en 0. La fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  car  $f$  est la primitive de  $\varphi$  qui s'annule pour 0.

②  $f(-x) = \int_0^{-x} \frac{\sin t}{t} dt$ . Le changement de variable  $u = -t$  nous

donne :  $f(-x) = \int_0^x \frac{\sin(-u)}{(-u)} (-du) = -\int_0^x \frac{\sin u}{u} du = -f(x)$  donc  $f$  est une fonction impaire et on l'étudiera sur  $[0; +\infty[$

③  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f'(x) = \frac{\sin x}{x}$ .  $f'$  a le même signe que  $\sin x$  pour  $x$  positif  
c'est-à-dire :

$$f'(x) = 0; x = k\pi$$

$$f'(x) > 0; x \in ]2k\pi; (2k+1)\pi[$$

$$f'(x) < 0; x \in ](2k+1)\pi; (2k+2)\pi[$$

On en déduit que les valeurs  $k\pi$  correspondent aux extrêmes de  $f$

**Tableau de variations :**

| X       | 0 | $\pi$ | $2\pi$ | $3\pi.....$ |
|---------|---|-------|--------|-------------|
| $F'(x)$ | 1 | 0     | 0      | 0           |
|         | + | -     | +      | -           |
| $f(x)$  |   |       |        |             |

④ Pour montrer la convergence de  $I$ , on intègre par parties l'intégrale  
 $I_a = \int_1^a \frac{\sin t}{t} dt$  en posant  $u = \frac{1}{t}$ ;  $dv = \sin t \cdot dt \Rightarrow du = -\frac{1}{t^2} dt$ ;  $v = -\cos t$

$$\text{On obtient alors } I_a = \left[ \frac{\cos t}{-t} \right]_1^a - \int_1^a \frac{\cos t}{t^2} dt$$

$$\text{Or, } \int_1^{+\infty} \left| \frac{\cos t}{t^2} \right| dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt \text{ qui est une intégrale convergente.}$$

$$\text{Comme, de plus, } \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{\cos t}{t} \right]_1^a = \cos 1 - \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{\cos a}{a} = \cos 1 \text{ alors } I \text{ est convergente.}$$

⑤ Pour calculer  $J_{n+1} - J_n$ , on utilise la relation  $\sin(2n+3)t - \sin(2n+1)t = 2\sin t \cos(2n+2)t$

$$\text{Alors : } J_{n+1} - J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+3)t - \sin(2n+1)t}{\sin t} \cdot dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2n+2)t \cdot dt = 0$$

On en déduit que  $J_{n+1} = J_n = \dots = J_0 = \frac{\pi}{2}$

Rappelons le lemme de Riemann-Lebesgue : si  $g$  est une fonction continue sur  $[a; b]$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b g(t) \cdot \sin nt \cdot dt = 0$

$$J_n - K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} - \frac{\sin(2n+1)t}{t} \right] dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t) \cdot \sin(2n+1)t \cdot dt$$

Il nous faut alors montrer que  $g$  est continue sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Il suffit pour cela d'étudier le problème en 0.

On utilise un développement limité de  $\sin t$  en 0 :

$$g(t) = \frac{t - \sin t}{t \cdot \sin t} = \frac{t - t + \frac{t^3}{6} + t^3 \varepsilon_1(t)}{t[t + t \varepsilon_2(t)]} = \frac{\frac{t}{6} + t \varepsilon_{1(t)}}{1 + \varepsilon_{2(t)}} \rightarrow 0$$

Lorsque  $t$  tend vers 0. On prolonge par continuité la fonction  $g$  en posant  $g(0)=0$

L'application du lemme de Riemann-Lebesgue avec la fonction  $g$  nous donne :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (J_n - K_n) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = \frac{\pi}{2}$$

⑦ Dans l'intégrale  $K_n$  on effectue le changement de variable  $u=(2n+1)t$

On obtient alors :

$$K_n = \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{u} du$$

Et comme I est convergente, on a :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{u} du = \lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = \frac{\pi}{2}$$

donc:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

En conséquence,  $y = \frac{\pi}{2}$  est asymptote en + l'infini à la courbe représentative de f

⑧ Courbe représentative de f(x) :

#### PROBLEME n° 4

① La fonction f est périodique de période 1 si et seulement si : pour tout x réel,  $f(x+1)=f(x)$ .

$$\text{Or, } f(x+1) = e^{2j\pi(x+1)} = e^{2j\pi x} \cdot e^{2j\pi} = e^{2j\pi x} = f(x)$$

$$\textcircled{2} \quad z_1 = a + ae^{4j\pi x} = a(1 + e^{4j\pi x}) = ae^{2j\pi x} (e^{-2j\pi x} + e^{2j\pi x}) = 2a \cos(2\pi x) e^{2j\pi x}$$

$$\text{-Si } x = \frac{1}{4}, 2\pi x = \frac{\pi}{2}; z_1 = 0$$

$$\text{-Si } x \neq \frac{1}{4} :$$

$$\text{Le module de } z_1 : |z_1| = |2a \cos(2\pi x)|$$

L'argument de  $z_1$  dépend des signes de  $a$  et de  $\cos(2\pi x)$

Sachant que  $x$  est compris entre 0 et 0.5 en étant différent de  $\frac{1}{4}$  et donc que  $(2\pi x) \in [0; \pi] - \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$ , il faut envisager 4 cas :

|         |                                                                                                                    |                                                                                                                                |
|---------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|         | $x \in \left[ 0; \frac{1}{4} \right[ \Rightarrow 2\pi x \in \left[ 0; \frac{\pi}{2} \right[$<br>$\cos(2\pi x) > 0$ | $x \in \left] \frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right] \Rightarrow 2\pi x \in \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right]$<br>$\cos(2\pi x) < 0$ |
| $a > 0$ | $\text{Arg}(z_1) = 2\pi x + 2k\pi$                                                                                 | $\text{Arg}(z_1) = 2\pi x + \pi + 2k\pi$                                                                                       |
| $a < 0$ | $\text{Arg}(z_1) = 2\pi x + \pi + 2k\pi$                                                                           | $\text{Arg}(z_1) = 2\pi x + 2k\pi$                                                                                             |

③

$$z_2 = \frac{1}{2} + e^{2j\pi x} + \frac{e^{4j\pi x}}{2} = \frac{1}{2}(1 + e^{4j\pi x}) + e^{2j\pi x} = \frac{1}{2}e^{2j\pi x}(2\cos 2\pi x) + e^{2j\pi x} = e^{2j\pi x}(\cos 2\pi x + 1)$$

$$= [\cos(2\pi x) + 1; 2\pi x]$$

④ On regroupe les termes ayant des coefficients égaux puis on factorise ce coefficient :

$$z = a_0(1 + e^{2j(n-1)\pi x}) + a_1(e^{2j\pi x} + e^{2j(n-2)\pi x}) + \dots + a_{\frac{n}{2}}(e^{2j\frac{n}{2}\pi x} + e^{2j(n-\frac{n}{2}-1)\pi x})$$

Le calcul des expressions entre parenthèses nécessite une factorisation comme précédemment

$$a_k(e^{2jk\pi x} + e^{2j(n-1-k)\pi x}) = a_k e^{j(n-1)\pi x} (e^{(2k-n+1)j\pi x} + e^{-(2k-n+1)j\pi x}) = a_k e^{j(n-1)\pi x} \cdot 2\cos((2k-n+1)\pi x)$$

$$\text{Donc, } z = 2e^{j(n-1)\pi x} \left[ \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} a_k \cos((2k-n+1)\pi x) \right]$$

$$|z| = 2 \left| \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} a_k \cos(2k-n+1)\pi x \right|$$

Quant à l'argument de  $z$ , il est égal à  $(n-1)\pi x + 2k\pi$  si  $\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} a_k \cos(2k - n - 1)\pi x > 0$

Et à  $(n-1)\pi x + \pi + 2k\pi$  si  $\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} a_k \cos(2k - n - 1)\pi x < 0$

**Dans les deux cas,  $\text{Arg}(z)$  est une fonction affine de  $x$**



**CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES  
AVRIL 1999**

**CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES**

**OPTION MATHEMATIQUES**

**VOIE B**

\*

\* \*

**EXERCICE n° 1**

❶ Soit  $a$  vecteur de  $E$  tel que  $\varphi(a) \neq 0$  ( $a$  existe et est non nul si  $\varphi$  non identiquement nulle).

Alors, pour tout  $x$  de  $E$ ,  $x = (x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} a) + \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} a$ . On vérifie aisément que le premier terme de la somme appartient à  $H$  et que le second appartient à  $\text{Vect}(a)$  où  $\text{Vect}(a)$  désigne l'espace vectoriel engendré par le vecteur  $a$ .

Donc  $E = H + \text{Vect}(a)$ . En outre, pour tout vecteur non nul  $c$  de  $\text{Vect}(a)$ , il existe  $k$  réel non nul tel que  $c = ka$  donc  $\varphi(c) = k\varphi(a) \neq 0$ . Donc  $H \cap \text{Vect}(a) = \{0_E\}$  donc  $E = H \oplus \text{Vect}(a)$ .

On en déduit que  $\dim E = \dim H + \dim \text{Vect}(a)$  d'où  $\dim H = n - 1$ .

❷ Soit  $(e_1, \dots, e_{n-1})$  une base de  $H$ . D'après le théorème de la base incomplète, il existe un vecteur  $e_n$  tel que  $(e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$  base de  $E$ .

Soit  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  la base duale associée alors pour tout  $x$  de  $E$ ,  $x = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) e_i$  et  $x \in H \Leftrightarrow \varphi_n(x) = 0$  i.e.  $H = \text{Ker} \varphi_n$ .

## EXERCICE n° 2

Pour tout  $A$  de  $G$ , on considère l'ensemble  $F = \{A^k, k \in \mathbb{Z}\}$  où  $\mathbb{Z}$  désigne l'ensemble des entiers relatifs.

Comme  $G$  est borné,  $F$  est borné.

Montrons qu'alors, pour tout  $A$  de  $G$ ,  $A$  est diagonalisable et les éléments de son spectre sont de module 1.

Comme le corps des complexes  $\mathbb{C}$  est algébriquement clos, le polynôme caractéristique de  $A$  est scindé sur  $\mathbb{C}$  i.e. il a toutes ses racines dans  $\mathbb{C}$ .

On sait alors qu'il existe  $P \in GL(n, \mathbb{C}) / P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_1 + N_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_s I_s + N_s \end{pmatrix}$  où  $\lambda_i$  désigne

la  $i$ ème valeur propre,  $I_i$  la matrice identité de taille l'ordre de multiplicité de la valeur propre  $\lambda_i$  et  $N_i$  une matrice nilpotente de même taille.

Alors,  $P^{-1}A^k P = \begin{pmatrix} (\lambda_1 I_1 + N_1)^k & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_s I_s + N_s)^k \end{pmatrix}$  pour tout  $k$  de  $\mathbb{Z}$ .

Comme l'application de l'ensemble des matrices à coefficients complexes d'ordre  $n$  dans lui-même qui à tout  $U$  de associe  $P^{-1}UP$  est bijective et continue, dire que les  $A^k$  sont bornées équivaut à dire que les  $P^{-1}A^k P$  le sont aussi.

De plus, montrer que les  $P^{-1}A^k P$  sont bornées équivaut à montrer que pour tout  $i = 1, \dots, s, (\lambda_i I_i + N_i)^k$  bornée.

Si pour tout  $k$  de  $\mathbb{Z}$ , et pour tout  $i = 1, \dots, s, (\lambda_i I_i + N_i)^k$  cela est en particulier vrai pour tout  $k$  entier naturel. Donc pour tout  $i = 1, \dots, s, |\lambda_i| < 1$  ou  $\{|\lambda_i| = 1 \text{ et } N_i = 0\}$ .

De même, si on raisonne sur  $A^{-1}$ , il existe  $Q \in GL(n, C) / Q^{-1}A^{-1}Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} I_1 + M_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_s} I_s + M_s \end{pmatrix}$   
 et on doit donc avoir pour tout  $i=1, \dots, s$ ,  $\left| \frac{1}{\lambda_i} \right| < 1$  ou  $\left\{ \left| \frac{1}{\lambda_i} \right| = 1 \text{ et } M_i = 0 \right\}$ .

D'où, nécessairement, pour tout  $i=1, \dots, s$ ,  $|\lambda_i| = 1$  et  $N_i = 0$  i.e.  $A$  est diagonalisable et ses valeurs propres sont de module 1.

Comme  $G$  est commutatif et que tous ses éléments sont diagonalisables, on peut appliquer le théorème de diagonalisation simultanée.

## PROBLEME

### Partie 1

$$\textcircled{1} \quad V_2(a_1, a_2) = a_2 - a_1 \text{ et } V_3(a_1, a_2, a_3) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_1).$$

$\textcircled{2}$  Si  $\exists i, j / a_i = a_j$  alors le déterminant a 2 lignes identiques, il est donc nul.

$\textcircled{3}$   $\textcircled{1}$  D'après 1) la propriété est vraie au rang 2.

$\textcircled{2}$  Supposons la propriété vraie au rang  $n$ . Les racines du polynôme sont  $a_1, \dots, a_n$ . Le polynôme a  $n$  racines distinctes, il est donc de degré  $n$ .

$\textcircled{3}$  En développant le déterminant  $P(x)$  par rapport à sa dernière colonne, on trouve que le coefficient de  $x^n$  vaut  $V_n(a_1, \dots, a_n)$ .

Le polynôme  $P(x)$  s'écrit donc :  $V_n(a_1, \dots, a_n) \prod_{i=1}^n (x - a_i)$  soit en remplaçant  $x$  par  $a_{n+1}$ , comme la propriété est supposée vraie au rang  $n$ , on en déduit que :

$$P(x) = V_n(a_1, \dots, a_n) \prod_{i=1}^n (x - a_i) = \prod_{1 \leq k < l \leq n+1} (a_l - a_k).$$

La propriété est vraie au rang 2. Si elle est vraie au rang  $n$ , alors elle est vraie au rang  $n+1$ . La propriété est donc vraie pour tout  $n$  supérieur ou égal à 2.

## Partie 2

❶ Si pour tout  $k$ ,  $P_k(x) = x^k$ ,  $\Delta_n(x_1, \dots, x_n) = V_n(x_1, \dots, x_n)$ .

❷ ①  $B$  est une famille de  $n$  polynômes échelonnée. C'est donc une base de l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n-1$ .

② On en déduit que  $P_{n-1}(x) = \lambda_{n-1}x^n + \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i P_i(x)$

③ En remplaçant dans le déterminant  $\Delta_n$ , on trouve que :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} P_0(x_1) & P_1(x_1) & \cdots & P_{n-2}(x_1) & \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i P_i(x_1) + \lambda_{n-1} x_1^{n-1} \\ P_0(x_2) & \cdots & \cdots & P_{n-2}(x_2) & \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i P_i(x_2) + \lambda_{n-1} x_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ P_0(x_n) & P_1(x_n) & \cdots & P_{n-2}(x_n) & \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i P_i(x_n) + \lambda_{n-1} x_n^{n-1} \end{vmatrix}, \text{ soit en enlevant à la dernière}$$

colonne la somme de  $n-1$  premières colonnes pondérée par les coefficients  $\alpha_i$ , on trouve :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} P_0(x_1) & P_1(x_1) & \cdots & P_{n-2}(x_1) & \lambda_{n-1} x_1^{n-1} \\ P_0(x_2) & \cdots & \cdots & P_{n-2}(x_2) & \lambda_{n-1} x_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ P_0(x_n) & P_1(x_n) & \cdots & P_{n-2}(x_n) & \lambda_{n-1} x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

avec  $\lambda_{n-1}$  le coefficient de  $P_{n-1}(x)$  affecté au vecteur  $x^{n-1}$  dans sa décomposition dans la base  $B$  i.e. le coefficient du terme de plus haut degré de  $P_{n-1}(x)$ .

De même, si  $\lambda_i, i = 0, \dots, n-2$  désigne le coefficient du terme de plus haut degré de

$$P_i, i = 0, \dots, n-2, \text{ on en déduit que } \Delta_n = \begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 x_1 & \dots & \lambda_{n-2} x_1^{n-2} & \lambda_{n-1} x_1^{n-1} \\ \lambda_0 & \dots & \dots & \lambda_{n-2} x_2^{n-2} & \lambda_{n-1} x_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \lambda_0 & \lambda_1 x_n & \dots & \lambda_{n-2} x_n^{n-2} & \lambda_{n-1} x_n^{n-1} \end{vmatrix}. \text{ Soit en factorisant}$$

la  $i$ ème colonne par  $\lambda_{i-1}$ , on trouve que  $\Delta_n = \lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1} V_n(x_1, \dots, x_n)$ .

③  $C_k^x$  est un polynôme de degré  $k$  et son terme de plus haut degré vaut  $\frac{1}{k!}$ .

$$\text{Donc, } C_n = \frac{1}{1!} \frac{1}{2!} \dots \frac{1}{(n-1)!} V_n(x_1, \dots, x_n).$$

### Partie 3

① Montrons par récurrence que pour tout  $k$ , entier naturel, il existe un polynôme  $T_k$  de degré  $k$  tel que  $\cos(k\theta) = T_k(\cos \theta)$  et que le terme de plus haut degré vaut  $2^k$ .

$\cos(0 \cdot \theta) = 1$  : la propriété est vraie au rang 0.

Supposons la propriété vraie jusqu'au au rang  $n$ , alors :

$$\cos((n+1)\theta) = \cos \theta \cos(n\theta) - \sin \theta \sin(n\theta) = T_1(\cos \theta) T_n(\cos \theta) - \sin \theta \frac{1}{n} \sin \theta \frac{d}{d\theta} T_n(\cos \theta)$$

$$\text{car } \sin(n\theta) = -\frac{1}{n} \frac{d}{d\theta} (\cos(n\theta)) = -\frac{1}{n} \frac{d}{d\theta} (T_n(\cos \theta)) = -\frac{1}{n} \sin \theta \frac{d}{d\theta} T_n(\cos \theta)$$

$$\text{d'où } \cos((n+1)\theta) = T_1(\cos \theta) T_n(\cos \theta) - \frac{1}{n} \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \frac{d}{d\theta} T_n(\cos \theta),$$

donc  $\cos((n+1)\theta)$  s'écrit comme somme et produit de polynômes en  $\cos \theta$ . C'est donc un polynôme en  $\cos \theta$ .

De plus, le terme de plus haut degré est le terme de plus haut degré du produit  $T_1(\cos \theta) T_n(\cos \theta)$ , soit d'après l'hypothèse de récurrence  $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ .

La propriété est vraie au rang 0.

Si elle est vraie jusqu'au rang  $n$  alors elle est vraie au rang  $n+1$ .

La propriété est donc vraie pour tout  $n$  entier naturel.

[www.touslesconcours.info](http://www.touslesconcours.info)

**CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES  
AVRIL 1999**

**CORRIGE DE L'EPREUVE DU CALCUL NUMERIQUE**

**OPTION MATHEMATIQUES**

**VOIE B**

\*  
\* \*

**EXERCICE N° 1**

$$\textcircled{1} EX = \sum_{k=0}^{10} k \cdot \frac{1}{11} = 5 \quad VX = \sum_{k=0}^{10} k^2 \frac{1}{11} - (EX)^2 = 10$$

$\textcircled{2} EZ_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EX_i = 5 \quad VZ_n = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n VX_i = \frac{10}{n}$  car les variables sont indépendantes.

Cette variable représente le nombre moyen de pièces défectueuses par jour sur  $n$  jours.

$$\textcircled{3} P_n < \frac{VZ_n}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \text{ d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donc } P_n < \frac{40}{n}.$$

$\textcircled{4}$  D'après l'inégalité ci-dessus on a  $n_0 = 3999$ .  $P_n$  est la probabilité pour que la moyenne empirique  $Z_n$  diverge de plus de 0,5 de sa moyenne théorique  $EZ_n$ . Il suffit donc d'effectuer cette moyenne sur 4000 jours ou plus pour qu'il y ait moins de 1% de chances que cette différence soit plus grande que 0,5.

$\textcircled{5}$   $W$  peut prendre toutes les valeurs entières dans  $\{0, 1, \dots, 20\}$ . Sa loi de probabilité est donnée par :

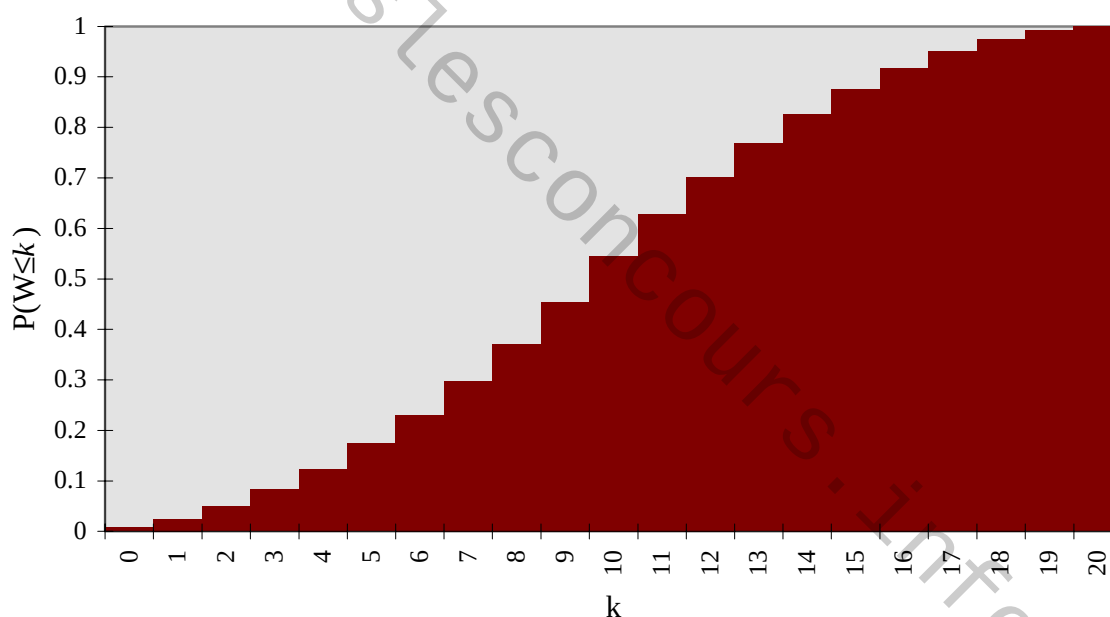
$$P(W = k) = \sum_{\substack{i \in \{0, 1, \dots, 20\} \\ tq \ k-i \in \{0, 1, \dots, 20\}}} P(X_1 = i)P(X_2 = k - i)$$

donc :

| $k$ | $P(W=k)$ | $K$ | $P(W=k)$ | $K$ | $P(W=k)$ |
|-----|----------|-----|----------|-----|----------|
| 0   | 1/121    | 7   | 8/121    | 14  | 7/121    |
| 1   | 2/121    | 8   | 9/121    | 15  | 6/121    |
| 2   | 3/121    | 9   | 10/121   | 16  | 5/121    |
| 3   | 4/121    | 10  | 11/121   | 17  | 4/121    |
| 4   | 5/121    | 11  | 10/121   | 18  | 3/121    |
| 5   | 6/121    | 12  | 9/121    | 19  | 2/121    |
| 6   | 7/121    | 13  | 8/121    | 20  | 1/121    |

$$EW = \sum_{k=0}^{k=20} k \cdot P(W = k) = 10 = EX_1 + EX_2$$

Fonction de répartition de  $W$



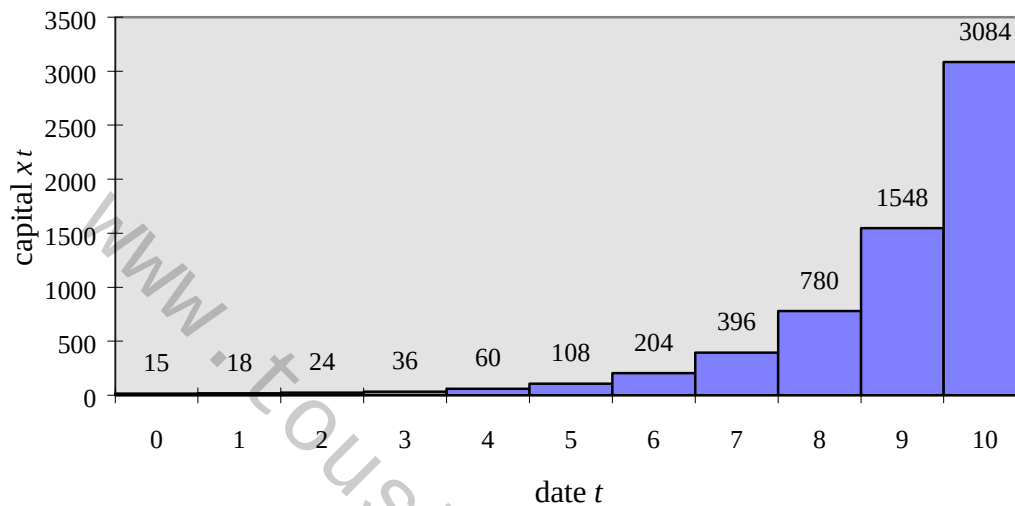
## EXERCICE N° 2

❶ Tableau représentant le capital du marchand :

| $t$                          | 1  | 2  | 3  | 4  | 5   | 6   | 7   | 8   | 9    | 10   |
|------------------------------|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|------|------|
| $X_{t-1}$                    | 15 | 18 | 24 | 36 | 60  | 108 | 204 | 396 | 780  | 1548 |
| $2 \cdot X_{t-1}$            | 30 | 36 | 48 | 72 | 120 | 216 | 408 | 792 | 1560 | 3096 |
| $X_t = 2 \cdot X_{t-1} - 12$ | 18 | 24 | 36 | 60 | 108 | 204 | 396 | 780 | 1548 | 3084 |



### Capital à chaque étape



② On a  $x_3 = 12 + 2^3(x_0 - 12) = 0$  donc  $x_0 = 10,5$ .

③ ① Avec les notations :

$$x_t = q \cdot x_{t-1} - c$$

② On reconnaît une série géométrique de raison  $q > 1$ . On a donc :

$$x_t = q^t \left( x_0 - \frac{c}{q-1} \right) + \frac{c}{q-1}$$

③ Si  $x_0 < \frac{c}{q-1}$  alors  $x_t$  est une fonction décroissante de  $t$ .

Si  $x_0 > \frac{c}{q-1}$  alors  $x_t$  est une fonction croissante de  $t$ .

④ Dans le cas où  $x_0 < \frac{c}{q-1}$ , la relation du b) donne

$$: q^t = \frac{-\frac{c}{q-1}}{x_0 - \frac{c}{q-1}} \text{ donc } t \log(q) = \log\left(\frac{1}{1 - \frac{q-1}{c}x_0}\right) \text{ d'où : } t = -\frac{\log\left(1 - \frac{q-1}{c}x_0\right)}{\log(q)}$$

⑤ Avec  $c=12$  et  $q=2$  cela donne  $t = -\frac{\log\left(1 - \frac{x_0}{12}\right)}{\log 2}$  ; comme  $t$  est un nombre d'étapes, il reste encore à prendre la partie entière de cette valeur.

$t$  est donc une fonction croissante de  $x_0$  quand  $0 < x_0 < 12$  et la droite  $x_0 = 12$  est une asymptote. Un capital de départ de 12 F entraîne un cycle infini où le capital vaut 12 F tout le temps.

Nombre d'étapes parcourues en fonction du capital initial

