CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES
VOIE A

AVRIL 2001

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

EXERCICE n° 1

❶ La dérivée de g est $g^{'}(x) = \alpha x^{\alpha-1} y^{\beta} = k\, x^{\alpha-1} \qquad (k > 0)$
On rappelle que $x^{\alpha} = e^{\alpha Ln(x)} > 0$, donc $g^{'}(x) > 0$ et g est strictement croissante.

Si $\alpha > 1$, $\underset{+\infty}{Lim}\, g = +\infty$ et $\underset{+\infty}{Lim} \dfrac{g(x)}{x} = +\infty$. On a donc une branche parabolique dans la direction verticale. D'autre part, $\underset{0}{Lim}\, g = 0$ et on peut prolonger g par continuité en zéro. Le graphe s'en déduit.

Si $0 < \alpha < 1$, $\underset{+\infty}{Lim} \dfrac{g(x)}{x} = 0$. La branche parabolique est dans la direction horizontale. les autres éléments ne changent pas.
Pour $\alpha = 1$, $g(x) = x\, y^{\beta}$. On a une application linéaire.

❷ Comme $ax + by \le R$, on a $x \le \dfrac{R - by}{a}$. La fonction g étant croissante, le maximum est atteint pour la plus grande valeur de x, à savoir $x = \dfrac{R - by}{a}$, d'où
$h(y) = \underset{x}{Max}\, f(x, y) = \left(\dfrac{R - by}{a}\right)^{\alpha} y^{\beta}$ à condition que $\dfrac{R - by}{a} > 0$, ce qui est vérifié.

❸ On obtient $a^{\alpha} h^{'}(t) = (R - bt)^{\alpha-1} t^{\beta-1} (R\beta - bt)$.
La fonction h est croissante si $t < \dfrac{R\beta}{b}$ et décroissante dans le cas contraire.

EXERCICE n° 2

❶ Il faut $x > -1$ et $x \neq 0$. On peut prolonger f par continuité en zéro, en posant $f(0) = 0$. On obtient $f^{'}(x) = \dfrac{x-(x+1)Ln(x+1)}{(x+1)x^2}$.
La dérivée est du signe du numérateur, on étudie donc ce numérateur.
On obtient alors que f est strictement décroissante de $]-1,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$.

❷ L'équation $f(x) = x$ est équivalente à $Ln(x+1) = x^2$. On étudie la fonction g définie sur R^{+*} par $g(x) = x^2 - Ln(x+1)$. Cette fonction admet un minimum négatif en $x = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ et elle est strictement croissante de $\left[\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2},+\infty\right[$ sur $[\lambda,+\infty[$ avec $\lambda < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique point fixe sur cet intervalle.

EXERCICE n° 3

❶ Pour deux numéros, on a : $2x+2=36$, soit $x=17$
Pour trois numéros, on a : $3x+3=36$, soit $x=11$
Pour six numéros, on a : $6x+6=36$, soit $x=5$

❷ Pour tout couple (x, y), la probabilité est $\dfrac{1}{38}\times\dfrac{1}{38}$. Les deux événements sont indépendants, pour toutes valeurs de x et de y.

❸ Il n'existe pas de stratégies gagnantes, car les évènements sont indépendants.

PROBLEME

❶ La dérivée de f est nulle pour $x=\frac{1}{a}$. La fonction f est croissante sur $\left]0,\frac{1}{a}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{a},+\infty\right[$. On trouve $f(\frac{1}{a})=-1-Ln(a)$

Si $a>\frac{1}{e}$, l'équation n'admet pas de solution;
Si $a=\frac{1}{e}$, on a une seule solution.
Si $0<a<\frac{1}{e}$, il y a deux solutions.

❷ La fonction admet une branche parabolique dans la direction $y=-ax$

❸ L'aire est égale à $I=\int_1^2(\frac{1}{2}x-Ln(x))dx$, d'où $I=\left[\frac{x^2}{4}-(xLnx-x)\right]_1^2$
On obtient $I=\frac{7}{4}-2Ln2$

❹ Il s'agit de montrer que f est convexe, on vérifie alors que sa dérivée seconde est positive

❺ Pour la suite géométrique (u_n), on a les résultats suivants:

Si $0<a<1$, la suite converge vers zéro.
Si $a=1$, la suite est stationnaire.
Si $a>1$, la suite est divergente.

Pour la suite (v_n), on a $v_{n+1}=-f(v_n)$ et comme f est négative, on vérifie par récurrence que la suite (v_n) est toujours positive.
D'autre part, si $(v_n)\to l$, alors l est solution de l'équation $l=-f(l)$. Soit $y=\frac{1}{2}l+Ln(l)$.
L'étude de cette fonction montre qu'il existe une solution unique l comprise entre $\frac{1}{2}$ et 1.
On considère la suite extraite des termes de rang pair et la suite extraite des termes de rang impair. Les deux suites sont adjacentes et convergent vers cette valeur l .

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES
VOIE A

AVRIL 2001

CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

1) L'événement X = p est réalisé par le couple (p, p) et par les couples (p, k) et (k, p) pour k entier variant de 1 à p-1. Comme l'urne contient n boules et que le tirage se fait avec remise, la probabilité de tirer un couple quelconque est 1/n². Il s'ensuit:

$$P(E_p) = \frac{2p-1}{n^2}$$

En particulier $P(E_2) = 3/n^2$, $P(E_3) = 5/n^2$.

2) L'espérance de X est :

$$E(X) = \sum_{p=1}^{n} p \frac{2p-1}{n^2} = \frac{2}{n^2}\sum_{p=1}^{n} p^2 - \frac{1}{n^2}\sum_{p=1}^{n} p$$

En utilisant les égalités rappelées dans l'énoncé, on trouve:

$$E(X) = \frac{(n+1)(4n-1)}{6n}$$

Exercice n° 2

1) Posons u = 1- t et dv = $e^{t/2}$dt. Alors du = -dt et v=2 $e^{t/2}$. On obtient :

$$I_1 = \frac{1}{4}[2(1-t)e^{t/2}]_0^1 + [e^{t/2}]_0^1 = \sqrt{e} - \frac{3}{2}$$

2) On pose de même $u = (1-t)^{n+1}$ et dv = $e^{t/2}$dt. On obtient cette fois :

$$I_{n+1} = \frac{1}{2^{n+2}(n+1)!}[2(1-t)^{n+1}e^{t/2}]_0^1 + \frac{1}{2^{n+1}n!}\int_0^1 (1-t)^n e^{t/2}dt$$

On en déduit aussitôt la relation demandée.

3) D'après la question 2),

$$\sum_{k=2}^{n}(I_k - I_{k-1}) = -\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^k k!}$$

Le premier membre se réduit à I_n - I_1. On remplace ensuite I_1 par son expression calculée dans la question 1)

4) Pour tout t∈[0, 1] et pour tout entier naturel non nul n, on a : $0 \leq (1 - t)^n \leq 1$.

L'intégrale étant une forme linéaire croissante, on a

$$0 \leq \int_0^1 (1-t)^n e^{t/2}dt \leq \int_0^1 e^{t/2}dt = 2(\sqrt{e} - 1)$$

Par conséquent :

$$0 \leq I_n \leq \frac{\sqrt{e}-1}{2^n n!}$$

Le nombre $A = \sqrt{e} - 1$ convient donc.

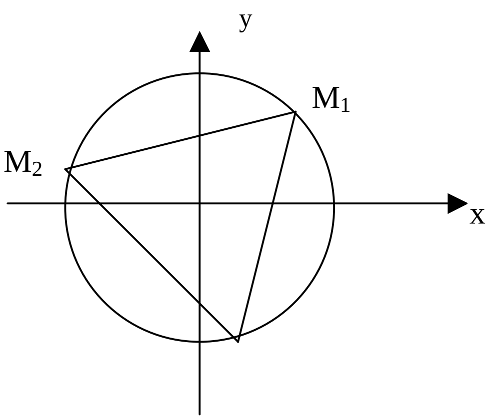
Lorsque n tend vers +∞, $2^n n!$ tend vers +∞, et son inverse tend vers 0. On en conclut que la suite (I_n) tend vers 0 et que la suite de terme général (u_n) converge vers $\sqrt{e}$

PROBLEME

I.1) Les solutions de l'équation $g(z) = 0$ sont les racines cubiques de $2(-1+i) = 2\sqrt{2}\, e^{3i\pi/4}$. La solution $z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4} = 1+i$ est évidente. Les autres solutions sont :

$$z_2 = j\, z_1 = \sqrt{2}\, e^{11i\pi/12} \text{ et } z_3 = j^2 z_1 = \sqrt{2}\, e^{-5i\pi/12}.$$

Les points M_1, M_2, M_3 images de ces racines dans le plan **P** appartiennent au cercle de centre 0 et de rayon $\sqrt{2}$ et forment un triangle équilatéral.



2) Soit x une solution réelle de $f(z)=0$. En annulant les parties réelle et imaginaire, on a :

$$x^3 + 4x^2 - 4x - 16 = 0 \text{ et } -4x^2 - 14x + 8 = 0.$$

La 2nde équation admet pour racines -4 et 1/2. En reportant dans la 1ère équation, on voit que -4 est racine de f mais pas 1/2. D'où $r = 4$.

Pour tout complexe z, on a:

$$\begin{aligned} f(z) &= (z + 4)(z^2 - 4) - 2i(z + 4)(2z - 1) \\ &= (z + 4)(z^2 - 4iz - 4 + 2i). \end{aligned}$$

D'où $a = -4i$ et $b = -4 + 2i$.

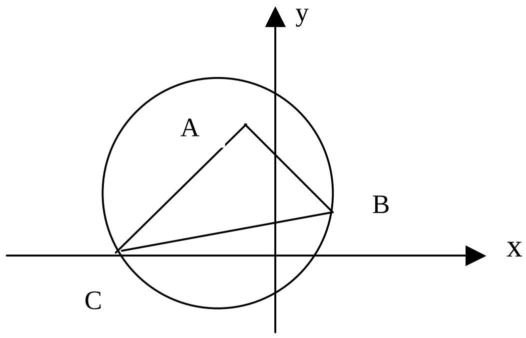
3) Puisque **C** est un corps, on se ramène à l'équation du 2$^{\text{ème}}$ degré :

$$z^2 - 4iz - 4 + 2i = 0$$

On reconnaît dans les 3 premiers termes le carré de z - 2i. Comme $-2i = (1-i)^2$, les trois solutions sont :

$z' = -4$ $z'' = 1+i$ et $z''' = -1+3i$

On a $z''' - z' = 3(1+i)$ et $z''' - z'' = -2(1-i)$ et $z''' - z'' = 2i(z''' - z')/3$ et avec les notations de la question 4), le triangle ABC est rectangle en A.



4) L'affixe de G est:

$$z_G = (-4 + 12i + 3 + 3i - 20)/12 = (-7+5i)/4.$$

5) D'après 3), $h(A) = \vec{A}B.A\vec{C} = 0$ car le triangle ABC est rectangle en A.

De même $h(C) = C\vec{A}.\vec{C}B$. Comme CA et CB on pour composantes respectives (3, 3) et (5, 1) on obtient *h(C)*=18.

En utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$h(M) = 6\left\|\vec{M}G\right\|^2 + \vec{M}G \cdot (4G\vec{A} + 3G\vec{B} + 5G\vec{C}) + h(G)$$

Par définition de G, le terme entre parenthèses est nul, donc :

$$h(M) = 6\left\|\vec{M}G\right\|^2 + h(G)$$

D'après 4), les composantes des vecteurs GA, GB et GC sont respectivement (3/4, 7/4),

(11/4, -1/4) et (-9/4, -5/4). On en déduit :

h(G) = -348/16 = -87/4

L'équation h(M) = 18 équivaut à $\left\|\vec{M}G\right\|^2 = 53/8$. L'ensemble des points cherché est le cercle de centre G et de rayon √53/8. On a vu que *h(C)*=18, le nombre 18 a été choisi pour que ce cercle passe par le point C.

II 1) En séparant les parties réelle et imaginaire, on a:

$x' = 4(x^2 - y^2) + 8xy - 4x + 14y - 18$

$y' = -4(x^2 - y^2) + 8xy - 14x - 4y + 10.$

2) Les composantes du vecteur OB étant (1, 1), les points O, B et M' sont alignés si et seulement si x' = y', c'est à dire après simplifications :

$4x^2 - 4y^2 - 5x + 9y - 14 = 0$

qu'on peut écrire sous la forme :

$4(x + 5/8)^2 - 4(y - 9/8)^2 - 21/2 = 0$

soit, sous forme canonique :

$(x + 5/8)^2 - (y - 9/8)^2 = 21/8$

On reconnaît l'équation d'une hyperbole équilatère, de centre (-5/8, 9/8), dont les asymptotes ont pour équations y = x + 7/4 et y = -x + 1/2.

3) Le point I centre gravité de A, B, C a pour affixe (-1 + 3i + 1 + i - 4)/3 = 4(-1 + i)/3. Les points O, I et M' sont alignés si et seulement si x' + y' = 0, puisque le vecteur OI est colinéaire au vecteur de composante (-1, 1). D'où, après simplification :

$$8xy - 9x + 5y - 4 = 0$$

soit, pour $x \neq -5/8$, $y = \frac{9x+4}{8x+5}$. L'ensemble H_2 est une hyperbole équilatère, ayant le même centre que H_1 le point de coordonnées (-5/8, 9/8). Les asymptotes admettent pour équations x=-5/8 et y=9/8.

4) Par définition H_1 est l'ensemble des points dont les images par *h* sont sur la droite OB et H_2 celui des points dont les images sont sur la droite OI. Or les droites OB et OI ont un point commun et un seul, à savoir O.

L'équation *f(z) = g(z)* se réduit à :

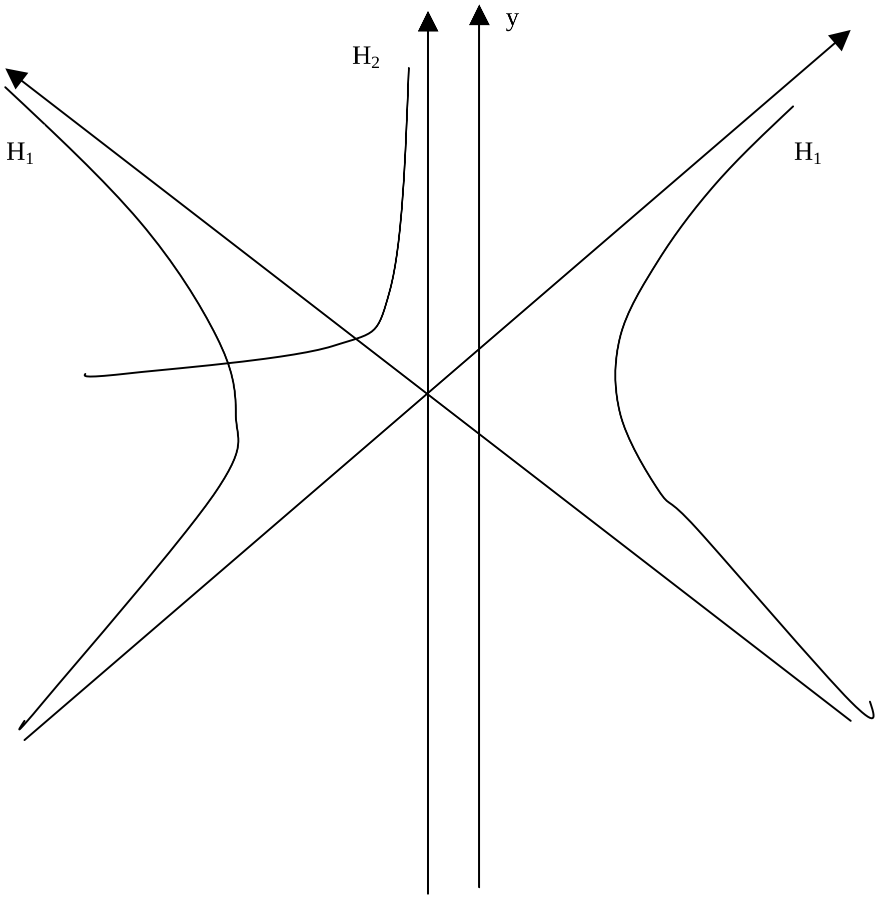
$$2(1 - i)z^2 - (2 + 7i)z - 9 + 5i = 0.$$

D'après les questions I. 1) et I. 2), nous savons que 1+i est solution. L'autre solution est :

$$\frac{-9+5i}{2(1-i)(1+i)} = \frac{-9+5i}{4}.$$

Pour résoudre l'équation, on peut aussi calculer le discriminant qui est Δ=-13-84i = (6-7i)².

L'un des points communs est donc B(1, 1), l'autre de coordonnées (-9/4, 5/4) est le symétrique de B par rapport au centre commun aux deux hyperboles.


y
H_2
H_1
H_1

CORRECTION
EPREUVE DE CALCUL NUMERIQUE
ITS A

Exercice 1:

1.

T1

$X = x_i$	2	3	4
$\mathbb{P}(X = x_i)$	1/6	1/3	1/2

T2

$Y = y_i$	1	2	3
$\mathbb{P}(Y = y_i)$	1/2	1/3	1/6

T3

$Z = z_i$	3	4	5	6	7
$\mathbb{P}(Z = z_i)$	1/6	1/6	1/3	1/6	1/6

2.

$\mathbb{E}(X) = 10/3,\ \mathbb{E}(Y) = 5/3,\ \mathbb{E}(Z) = 5$ $\qquad$ $\mathrm{Var}(X) = 5/9,\ \mathrm{Var}(Y) = 5/9,\ \mathrm{Var}(Z) = 5/3.$

3. On note F la fonction de répartition de Z. Cette fonction est définie par

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 3 \\ 1/6 \text{ si } 3 \leq x < 4 \\ 1/3 \text{ si } 4 \leq x < 5 \\ 2/3 \text{ si } 5 \leq x < 6 \\ 5/6 \text{ si } 6 \leq x < 7 \\ 1 \text{ si } 7 \leq x \end{cases}$$

Exercice 2.

1.

PREMIERE FORMULE

Hypothèse de récurrence : $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$; on vérifie qu'elle est vraie pour $n = 2$ et en la supposant vraie pour n, montrons qu'elle est satisfaite pour $n + 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration.

DEUXIEME FORMULE

Hypothèse de récurrence : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; on vérifie qu'elle est vraie pour $n = 2$ et la supposant vraie pour n, montrons qu'elle est satisfaite pour $n + 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}. \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration.

2.

$$\begin{aligned} C_n^{p+1} + C_n^p &= \frac{n!}{(n-p-1)!(p+1)!} + \frac{n!}{(n-p)!p!} \\ &= \frac{n!(n-p)}{(n+1-p-1)!(p+1)!} + \frac{n!(p+1)}{(n-p)!(p+1)!} \\ &= \frac{n![(n-p) + (p+1)]}{(n-p)!(p+1)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n!(n+1)}{(n-p)!(p+1)!} \\
&= C_{n+1}^{p+1}.
\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration.

Exercice 3.

1.

$$\begin{aligned}
\sigma_n^2 &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu_n)^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \mu_n^2 - 2\mu_n \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \\
&= \frac{q_n}{n} + \mu_n^2 - 2\mu_n^2 \\
&= \frac{q_n}{n} - \mu_n^2
\end{aligned}$$

2.1.a. On établit la première égalité comme suit :

$$\begin{aligned}
(n+1)\sigma_{n+1}^2 - n\sigma_n^2 &= \sum_{k=1}^{n+1}(x_k-\mu_{n+1})^2 - \sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu_n)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu_{n+1}-\mu_n+\mu_n)^2 - \sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu_n)^2 + (x_{n+1}-\mu_{n+1})^2 \\
&= -2(\mu_n-\mu_{n+1})\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu_n) + n(\mu_n-\mu_{n+1})^2 + (x_{n+1}-\mu_{n+1})^2 \\
&= n(\mu_n-\mu_{n+1})^2 + (x_{n+1}-\mu_{n+1})^2,
\end{aligned}$$

où la dernière égalité a lieu car $\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k - n\mu_n = n\mu_n - n\mu_n$.
La deuxième égalité s'obtient facilement en écrivant :

$$(n+1)\mu_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1} = n\mu_n + x_{n+1}.$$

2.1.b. De **2.1.a.**, on en déduit que

$$\sigma_{n+1}^2 = \frac{n}{n+1}\sigma_n^2 + \frac{n}{n+1}(\mu_{n+1}-\mu_n)^2 + \frac{1}{n+1}(x_{n+1}-\mu_{n+1})^2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n}{n+1}\sigma_n^2 + \frac{n}{n+1}(\mu_{n+1} - \frac{n+1}{n}\mu_{n+1} + \frac{1}{n}x_{n+1})^2 + \frac{1}{n+1}(x_{n+1} - \mu_{n+1})^2 \\
&= \frac{n}{n+1}\sigma_n^2 + \frac{n}{n+1}(-\frac{1}{n}\mu_{n+1} + \frac{1}{n}x_{n+1})^2 + \frac{1}{n+1}(x_{n+1} - \mu_{n+1})^2 \\
&= \frac{n}{n+1}\sigma_n^2 + \frac{1}{(n+1)n}(\mu_{n+1} - x_{n+1})^2 + \frac{1}{n+1}(x_{n+1} - \mu_{n+1})^2 \\
&= \frac{n}{n+1}\sigma_n^2 + \frac{1}{n}(\mu_{n+1} - x_{n+1})^2.
\end{aligned}$$

2.2. Le calcul de la moyenne se fait directement en utilisant la formule de la moyenne de l'énoncé et la première relation établie à l'**Exercice 2.**

$$\begin{aligned}
n\mu_n &= \sum_{k=1}^{n} x_k \\
&= \sum_{k=1}^{n}(1 + \varepsilon\frac{2k-n-1}{n-1}) \\
&= n + \varepsilon(-n\frac{n+1}{n-1} + \frac{2}{n-1}\sum_{k=1}^{n} k) \\
&= n + \varepsilon(-n\frac{n+1}{n-1} + \frac{2n(n+1)}{2(n-1)}) \\
&= n + \varepsilon(-n\frac{n+1}{n-1} + \frac{n(n+1)}{(n-1)}) \\
&= n.
\end{aligned}$$

La valeur de μ_n est $\mu_n = 1$.

A partir de la relation **2.1.a.**, on peut aussi établir par récurrence la relation :

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\},\ \mu_k = 1 - \varepsilon(1 - \frac{k-1}{n-1}).$$

En conséquence de quoi, on a

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\},\ x_k - \mu_k = \varepsilon\frac{k-1}{n-1}. \tag{1}$$

On va utiliser cette relation pour calculer la variance de la suite. Pour ce qui concerne la variance, nous faisons un raisonnement par récurrence en utilisant la formule établie à la question **2.1.b.** et (1) : étudions les cas où $k = 1, 2, 3, 4, 5$:

$$
\begin{aligned}
\sigma_1^2 &= 0, \\
\sigma_2^2 &= (x_2-\mu_2)^2 = \frac{(2-1)^2\varepsilon^2}{(n-1)^2}, \\
\sigma_3^2 &= \frac{2}{3}(2-1)\frac{\varepsilon^2}{(n-1)^2} + 2\frac{\varepsilon^2}{(n-1)^2}, \\
\sigma_4^2 &= \frac{3.2}{4.3}(2-1)\frac{\varepsilon^2}{(n-1)^2} + \frac{3}{4}(3-1)\frac{\varepsilon^2}{(n-1)^2} + (4-1)\frac{\varepsilon^2}{(n-1)^2}, \\
\sigma_5^2 &= \frac{4.3.2}{5.4.3}(2-1)\frac{\varepsilon^2}{(n-1)^2} + \frac{4.3}{5.4}(3-1)\frac{\varepsilon^2}{(n-1)^2} + \frac{4}{5}(4-1)\frac{\varepsilon^2}{(n-1)^2} + (5-1)\frac{\varepsilon^2}{(n-1)^2}.
\end{aligned}
$$

Supposons la relation de récurrence : $\forall k \in \{1,\ldots,n\}$,

$$\sigma_k^2 = \frac{2.(2-1)}{k}\frac{\varepsilon^2}{(n-1)^2} + \frac{3.2}{k}\frac{\varepsilon^2}{(n-1)^2} + \frac{4.3}{k}\frac{\varepsilon^2}{(n-1)^2} + \ldots + (k-1)\frac{\varepsilon^2}{(n-1)^2}.$$

On a établit que pour $k = 1,2,3,4,5$ l'hypothèse de récurrence est satisfaite, supposons la vraie à l'étape k et montrons qu'elle reste vraie à l'étape $k+1$; en utilisant la formule établie à la question **2.1.b.** et la relation (1), on a :

$$
\begin{aligned}
\sigma_{k+1}^2 &= \frac{k}{k+1}\sigma_k^2 + \frac{1}{k}\left(\frac{\varepsilon\, k}{n-1}\right)^2 \\
&= \frac{k}{k+1}\sigma_k^2 + k\left(\frac{\varepsilon}{n-1}\right)^2 \\
&= \frac{2.(2-1)}{k+1}\frac{\varepsilon^2}{(n-1)^2} + \frac{3.2}{k+1}\frac{\varepsilon^2}{(n-1)^2} + \ldots + \frac{k(k-1)}{k+1}\frac{\varepsilon^2}{(n-1)^2} + k\frac{\varepsilon^2}{(n-1)^2};
\end{aligned}
$$

la relation de récurrence est à présent établie. Par conséquent :

$$
\begin{aligned}
\sigma_n^2 &= \sum_{k=1}^{n}\frac{k(k-1)\varepsilon^2}{n(n-1)^2} \\
&= \frac{\varepsilon^2}{n(n-1)^2}\sum_{k=1}^{n}k(k-1) \\
&= \frac{\varepsilon^2}{n(n-1)^2}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2 - \sum_{k=1}^{n}k\right) \\
&= \frac{\varepsilon^2}{n(n-1)^2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)-3n(n+1)}{6}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\varepsilon^2 n(n+1)(n-1)}{3n(n-1)^2} \\
&= \frac{\varepsilon^2(n+1)}{3(n-1)} \\
&= \frac{\varepsilon^2}{3}(1+\frac{2}{n-1}).
\end{aligned}
$$

La valeur de σ_n^2 est égale à $\sigma_n^2 = \frac{\varepsilon^2}{3}(1+\frac{2}{n-1})$ pour tout $n > 1$.

Exercice 3. En posant $u = \ln(t)$ et $v' = 1$, on obtient

$$
\begin{aligned}
\int_1^2 \ln(t)dt &= [\ln(t)t]_1^2 - \int_1^2 \frac{t}{t}dt \\
&= \ln(2).2 - [1]_1^2 \\
&= 2\ln(2) - 1 \\
&= 0.386
\end{aligned}
$$