

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

CORRIGE DE L'EPREUVE DE CALCUL NUMERIQUE

*

* *

EXERCICE n° 1

❶ ① $p_{1a} = 0,8538$.

② $p_{1b} = (0,8538)^5 = 0,4537$.

❷ ① $p_{2a} = (0,8538)^{30} = 8,723 \cdot 10^{-3}$.

② $p_{2b} = 30 \times (0,8538)^{29} \times (0,1226 + 0,0236) = 4,481 \cdot 10^{-2}$.

③ $p_{2c} = 1 - (p_{2a} + p_{2b}) = 0,9465$.

❸ ① $\pi = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{0,2 - 0,25 \times p}{1 - p}$.

② $\pi \leq 0,1 \Leftrightarrow p \geq \frac{2}{3}$ donc $p = 0,6667$.

③ La probabilité cherchée est la somme des probabilités d'avoir décontaminé 20, 21, 22, 23, 24 ou 25 parcelles, soit :

$$p_{3c} = C_{25}^5 \left(\frac{1}{3}\right)^{20} \left(\frac{2}{3}\right)^5 + C_{25}^4 \left(\frac{1}{3}\right)^{21} \left(\frac{2}{3}\right)^4 + C_{25}^3 \left(\frac{1}{3}\right)^{22} \left(\frac{2}{3}\right)^3 + C_{25}^2 \left(\frac{1}{3}\right)^{23} \left(\frac{2}{3}\right)^2 + C_{25}^1 \left(\frac{1}{3}\right)^{24} \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^{25} \\ = 2,269 \cdot 10^{-6}$$

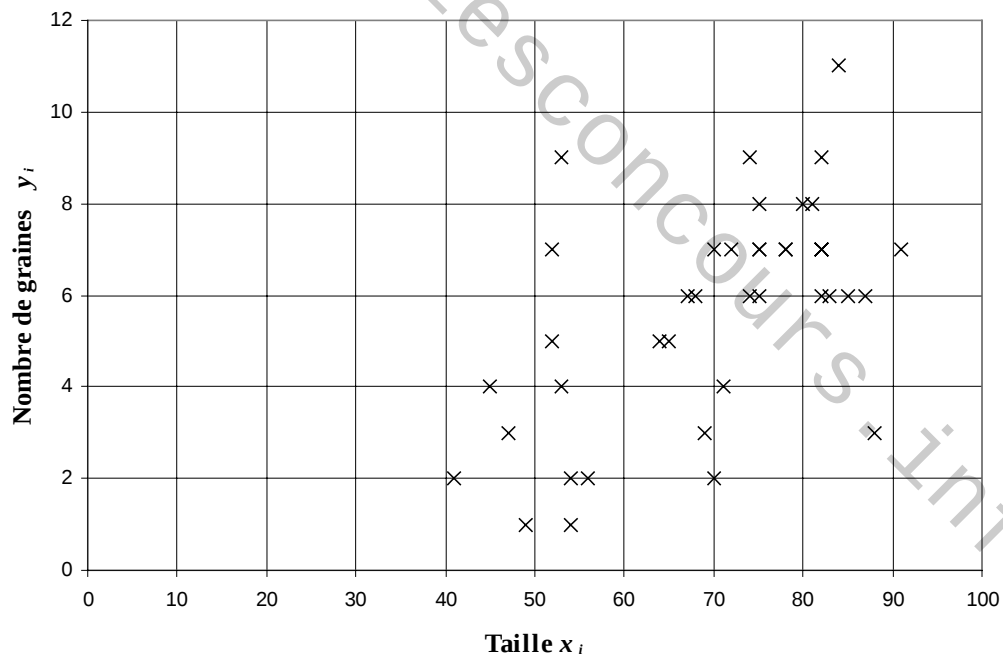
EXERCICE n° 2

①

	Taille	Nombre de graines
Minimum	41	1
Maximum	91	11
Moyenne	69,58	5,65
Mode	82	7
Médiane	73	6
Ecart type	13,53	2,40

②

Nombre de graines en fonction de la taille



③ On remarque que le nombre de graines semble proportionnel à la taille des gousses, mais ce lien n'est pas déterministe, comme en témoigne la dispersion des points du graphique.

④

Taille des gousses

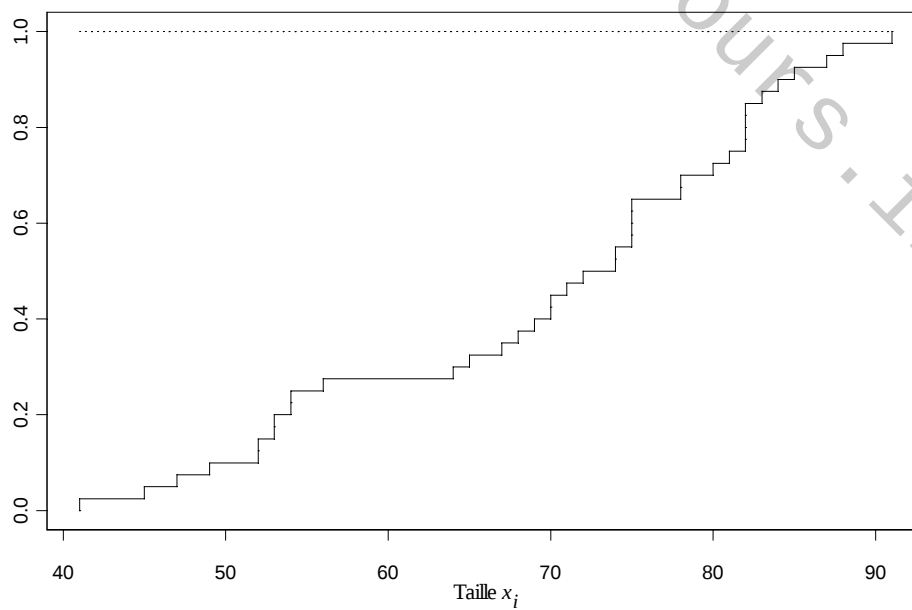
Classes	Fréquence	% cumulé
45	2	5,0%
50	2	10,0%
55	6	25,0%
60	1	27,5%
65	2	32,5%
70	5	45,0%
75	8	65,0%
80	3	72,5%
85	8	92,5%
90	2	97,5%
95	1	100%

Nombre de graines

Classes	Fréquence	% cumulé
3	9	22,5%
6	14	57,5%
9	16	97,5%
12	1	100%

⑤

Fonction de répartition empirique



EXERCICE n° 3

Le système est symétrique en x et y : si (x,y) est solution alors (y,x) est solution.

On pose $P = xy$ et $S = x + y$.

On est ramené au système :

$$\begin{cases} S^2 - 2P = 208 \\ P = 96 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} S = 20 \\ P = 96 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} S = -20 \\ P = 96 \end{cases}.$$

On doit donc résoudre deux équations du second degré :

$$X^2 - 20X + 96 = 0 \text{ et } X^2 + 20X + 96 = 0.$$

La première admet comme racines 8 et 12, la seconde -8 et -12.

Le système a donc comme ensemble de solutions :

$$\{(8,12);(12,8);(-8,-12);(-12,-8)\}.$$

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

*

* *

EXERCICE n° 1

❶ La dérivée de τ est $\tau'(x) = -1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} > 0$. La fonction τ est donc décroissante de -1 à $+\infty$. La dérivée de ϕ est $\phi'(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ et la fonction ϕ est croissante de -1 à 0 .

❷ La fonction ϕ étant croissante, on a $I_{k+1} \subset I_k$ et comme τ est décroissante, $J_{k+1} \subset J_k$.

❸ La résolution de l'inéquation $x^2 + 2kx + 1 > 0$, montre que le domaine de définition de f_k est $I_k \cup J_k$. On en déduit que le domaine de définition de f est $I_n \cup J_n$.

❹ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f_k(x) - \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}) = k$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{n(n+1)}{2}$

EXERCICE n° 2

❶ Le domaine de définition de f est l'intervalle $[2, +\infty[$

❷ On trouve $f^2(x) = 2((x-1) + |x-3|)$ et $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \\ 2\sqrt{x} - 2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

③ Les couples d'entiers naturels qui vérifient $y = f(x)$ sont (2,2) et (3,2)

④ Comme la fonction f est strictement croissante sur $[3, +\infty[$, elle est bijective sur cet intervalle. La fonction réciproque g^{-1} est dérivable et sa dérivée est égale à : $(g^{-1})' = \frac{1}{f'}$. Le graphe de g^{-1} est le symétrique du graphe de g par rapport à

la première bissectrice. On obtient $g^{-1}(x) = \frac{x^2}{4} + 2$

PROBLEME

① Les tableaux de variation des fonctions $x - \sin x$ et $\sin x - \frac{2x}{\pi}$ permettent de vérifier la première inégalité. Il en est de même pour la deuxième.

② Le domaine de définition de g est l'ensemble des nombres réels non entiers. La dérivée de g est $g'(x) = 2(1 + \frac{1}{\sin^2 \pi x})$. La fonction g est strictement monotone sur chaque intervalle de la forme $]n, n+1[$. Il existe donc une unique solution de l'équation $g(x) = 0$ sur chacun de ces intervalles.

Soit $\beta_n = \alpha_n - n$, on a : $g(\beta_{n+1}) = -2(n+1) < g(\beta_n)$ et comme g est strictement croissante, $\beta_{n+1} < \beta_n$. On vérifie aisément que $0 < \beta_n < \frac{1}{2}$. La suite (β_n) est décroissante minorée, donc elle converge vers une limite l .

Supposons que la limite l . On a $g(n + \beta_n) \geq 2(n+1) + 2\beta_n - \frac{1}{2\beta_n}$ et cette dernière expression est négative (car $g(\alpha_n) < 0$). On en déduit une impossibilité par passage à la limite, donc $l = 0$.

③ La dérivée de f est égale à $f'(x) = \frac{\pi \sin x}{4} g(x)$. Si n est pair, la fonction f est décroissante sur $[n, \alpha_n]$ et croissante sur $[\alpha_n, n+1]$. Pour n impair, la variation est en sens contraire.

En étudiant les variations de la fonction $\varphi(x) = f(x) + \frac{1}{2}x$, on vérifie l'inégalité proposée.

Le graphe de la fonction f est compris entre les droites $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ et $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

$$v_n = \int_{n+1/4}^{n+1/2} h(x) dx = \frac{\pi}{4} \int_{n+1/4}^{n+1/2} (2x+1) \sin \pi x dx - \frac{1}{2} \int_{n+1/4}^{n+1/2} \cos \pi x dx$$

On calcule alors chacune des deux intégrales précédentes

La première se calcule par intégration par parties et on obtient : $\frac{1}{4}(2n + \frac{3}{2})(-1)^n \frac{\sqrt{2}}{2}$

La deuxième se calcule de la même façon pour obtenir : $\frac{(-1)^n}{2\pi}(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$

On obtient alors le résultat demandé.

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

*

* *

Exercice 1

Notons x , y et z les trois chiffres qui composent un nombre entier $< 10^p$

Ce nombre s'écrit $N = 10^2x + 10y + z < 10^p$ et x , y et z vérifient $x+y+z=3$. Pour que cette dernière égalité soit vérifiée, il faut que $x \leq 3$, $y \leq 3$ et $z \leq 3$. Discutons suivant la valeur de p l'ensemble des solutions S des entiers N .

a) si $p=0$, $10^p=1$ et il n'existe d'entier inférieur à 1 dont la somme des 3 chiffres est égale à 3, donc $S_0 = \emptyset$.

b) Si $p=1$, $3=003$ est le seul entier inférieur à 10 dont la somme des 3 chiffres est égale à 3 :

$$S_1 = \{3\}.$$

c) Si $p=2$, pour que $N < 100$, il faut que $x=0$ et donc $y+z=3$. D'où

$$S_2 = \{30, 21, 12, 03\}.$$

d) Enfin si $p \geq 2$, x , y et z vérifient :

$$100x + 10y + z < 10^p \text{ et } x + y + z = 3.$$

En faisant varier x , puis y puis z de 0 à 3, on trouve :

$$S_p = \{310, 300, 120, 111, 102, 30, 21, 12, 3\}.$$

Exercice 2

Le nombre N de nombres de 4 chiffres distincts qu'on peut former à l'aide des chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6 est égal au nombre d'arrangements de 4 chiffres pris dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$: il y a 6 façons de choisir le premier. Une fois celui-ci choisi, il y a 5 façons de choisir le second, etc.
Donc $N = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = A_6^4 = 6! / (6-4)! = 360$

Pour calculer leur somme S , notons x, y, z, t les quatre chiffres pris dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ formant le nombre, x désignant le millier, y la centaine, z la dizaine et t l'unité. On peut donc écrire :

$$m = 1000x + 100y + 10z + t$$

Donc leur somme s'écrit :

$$S = \sum 1000x + 100y + 10z + t$$

Dans cette sommation, chaque chiffre x, y, z et t varient de 1 à 6 et il faut compter le nombre de fois où chaque chiffre figure dans les nombres en question. Or pour x donné (par exemple 6 pour fixer les idées), il y a $A_5^3 = 5! / (5-3)! = 60$ façon d'arranger les trois chiffres y, z et t pris dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. On peut donc écrire S sous la forme :

$$\begin{aligned} S &= 60(1000 \sum_1^6 x + 100 \sum_1^6 y + 10 \sum_1^6 z + \sum_1^6 t) \\ &= 60(1000+100+10+1)(1+2+3+4+5+6) \\ &= 60 \cdot 1111 \cdot 21 = 1\,399\,860 \end{aligned}$$

La décomposition de S en produit de facteurs premiers s'écrit :

$$S = 60 \times 21 \times 1111 = 5 \times 2^2 \times 3 \times 3 \times 7 \times 11 \times 101 = 5 \times 7 \times 11 \times 101 \times 2^2 \times 3^2$$

PROBLEME

1)

1.1) On a :

$$z \bar{z}' = (x + iy)(x' - iy') = xx' + yy' + i(x'y - x'y')$$

$$\bar{z} z' = (x - iy)(x' + iy') = xx' + yy' + i(xy' - x'y)$$

et on vérifie que $z \bar{z}' + \bar{z} z' = 2(xx' + yy')$ et $z \bar{z}' - \bar{z} z' = 2i(x'y - x'y')$. D'où les résultats.

1.2) De même, comme $\alpha \bar{z} + \bar{\alpha} z = 2(ax + by)$ on a :

$$M(x,y) \in D \Leftrightarrow ax + by + c = 0 \Leftrightarrow \alpha \bar{z} + \bar{\alpha} z + 2c = 0.$$

$$1.3) \quad M(x,y) \in C \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2 - c$$

qui est l'équation du cercle de centre A(a,b) et de rayon $a^2 + b^2 - c$ (qui est > 0 par hypothèse).
Donc :

$$M(z) \in C \Leftrightarrow |z - \alpha|^2 = |\alpha|^2 - c \Leftrightarrow |z|^2 - (\alpha \bar{z} + \bar{\alpha} z) + c = 0 \text{ (en développant } |z - \alpha|^2 \text{)}.$$

2)

2.1) $M(z)$ est invariant par $f \Leftrightarrow f(z) = z \Leftrightarrow 1/\bar{z} = z \Leftrightarrow |z|^2 = 1$ et d'après 1.3) on reconnaît le cercle de centre 0 et de rayon 1.

Comme $f(z') = f(1/\bar{z}) = z$, l'image de $M'(z')$ est $M(z)$, c'est à dire $f \circ f$ est la fonction identité.

2.2) D'après 1.1),

$$\det(OM, OM') = (z \bar{z}' - \bar{z} z')/2i = z/z - \bar{z}/\bar{z} = 0,$$

donc OM et OM' sont colinéaires et comme leur produit scalaire est égal à

$$z \bar{z}' + \bar{z} z' = z/z + \bar{z}/\bar{z} = 2 > 0,$$

ils sont de même sens. De plus,

$$OM \cdot OM' = |z|/|\bar{z}| = 1 \text{ car } |z| = |\bar{z}|.$$

2.3.a) Γ étant le cercle de centre A(-1), d'après 1.3) :

$$M(z) \in \Gamma^* \Leftrightarrow |z+1|^2 = 1 \Leftrightarrow |z|^2 + z + \bar{z} = 0.$$

D'après 2.2) :

$$OM' = 1/OM = 1/|z| \text{ et } AM'^2 = |1+1/\bar{z}|^2 = |1 + \bar{z}|^2/|z|^2 \text{ car } |z|=|\bar{z}|.$$

On en déduit que :

$$AM'^2 - OM'^2 = (|1 + \bar{z}|^2 - 1)/|z|^2 = (1 + z + \bar{z} + |z|^2 - 1)/|z|^2 = (z + \bar{z} + |z|^2)/|z|^2 = 0$$

car $M(z) \in \Gamma^*$ donc $|z|^2 + z + \bar{z} = 0$.

2.3.b) D'après la question précédente, l'image M' est par f est le point d'intersection du segment OM et de la médiatrice du segment OA.

2.3.c) Comme $f \circ f = \text{Id}$, f est bijective. D'après 2.3.b) l'image du cercle Γ^* est la médiatrice du segment [OA]. Donc si $M \in [I J]$, $\exists M' \in \Gamma^*$ tel que $f(M') = M$ et donc $f(M) = f \circ f(M') = M'$. Donc l'image du segment [I J] par f est le grand arc IJ du cercle Γ^* . L'image par f du petit arc IJ est donc le complémentaire du segment [I J].

2.4) Soit Δ une droite passant par O et $M \in \Delta^* = \Delta - \{O\}$ et M' son image par f . D'après la question 2.2), les vecteurs OM et OM' sont colinéaires et de même sens, donc $M' \in \Delta^*$ et Δ^* est invariant par f , c'est à dire $f(\Delta^*) = \Delta^*$.

2.5) On vérifie par un calcul fastidieux que le point M' image de M par f appartient au cercle qui passe par les points A, B et N. L'origine de ce cercle est sur Oy.

Pour construire l'image M' de M par f , on construit le point N symétrique de $M(z)$ par rapport à Ox qui a pour affixe $\bar{z}$, puis on trace le cercle passant par A(-1) B(1) et N($\bar{z}$), l'image M' de M est le point d'intersection de ce cercle avec le segment OM.

2.6) Par construction, les points O, M et M' sont sur une même droite. Pour montrer que $M' = f(M)$, il suffit de montrer que $OM \cdot OM' = 1$.

- Comme H est le point de tangence au cercle C à partir de M, le triangle OHM est rectangle en H, et d'après Pythagore :

$$OM^2 = OH^2 + HM^2, \text{ soit } |z|^2 = 1 + HM^2, \text{ car OH est rayon du cercle C donc OH}=1$$

- Comme M' est la projection de H sur OM, les triangles OM'H et HM'M sont rectangles en M', et d'après Pythagore :

$$OH^2 = OM'^2 + HM'^2, \text{ soit } 1 = OM'^2 + HM'^2 \text{ et}$$

$$HM^2 = MM'^2 + HM'^2$$

En utilisant ces 3 relations, on calcule OM'^2 :

$$\begin{aligned} OM'^2 &= 1 - HM'^2 = 1 - (HM^2 - MM'^2) \\ &= 1 - (|z|^2 - 1 - MM'^2) = 2 - |z|^2 - (OM - OM')^2 \\ &= 2 - |z|^2 - OM^2 - OM'^2 + 2OM \cdot OM' \end{aligned}$$

et comme $OM^2 = |z|^2$, on en déduit :

$$2 - 2OM \cdot OM' = 0 \text{ soit } OM \cdot OM' = 1$$

donc $f(M) = M'$.

Pour construire $M' = f(M)$ lorsque M est hors de (C), on trace la tangente à (C) passant par M : l'image de M est la projection orthogonale sur OM du point de tangence H au cercle. M' est alors à l'intérieur de (C).

Comme $f \circ f = \text{Id}$, f est bijective : si M est à l'intérieur de (C), M est l'image d'un point M' à l'extérieur de C, donc on peut construire M par une démarche inverse : on construit la droite passant par M et orthogonal à OM . Si H est le point d'intersection de cette droite et du cercle C, on trace la tangente à C en H et le point M' image de M est l'intersection de cette tangente et de la droite OM.

2.7.a) Le vecteur orthogonal à la droite (D) a pour composante (a, b). C'est aussi le vecteur directeur de la droite orthogonale à (D) et passant par O qui a pour équation : $bx - ay = 0$. Le point d'intersection H(m,n) de ces 2 droites vérifie donc :

$$am + bn + c = 0 \text{ et } bm - an = 0,$$

d'où :

$$m = -ac/(a^2 + b^2) \text{ et } n = -bc/(a^2 + b^2).$$

On en déduit

$$OH^2 = [a^2c^2 + b^2c^2]/(a^2 + b^2)^2, \text{ soit } OH = [c^2/(a^2 + b^2)]^{1/2}.$$

D'après 2.2), si $H' = f(H)$ alors $OH \cdot OH' = 1$, d'où $OH' = 1/OH = [(a^2 + b^2)/c^2]^{1/2}$.

2.7.b) Soit $M \in D$ et $M' = f(M)$. Comme C' est de diamètre OH' , on a :

$M' \in C' \Leftrightarrow$ les vecteurs OM' et $M'H'$ sont orthogonaux.

Or $H' = f(H)$ a pour affixe $1/(m - in) = (a^2 + b^2)(m + in)/c^2 = (-a - ib)/c$ (en remplaçant m et n par leurs valeurs ci-dessus).

Posons $\alpha = a + ib$. H' a pour affixe $-\alpha/c$ et donc le vecteur $M'H'$ a pour affixe $1/\bar{z} + \alpha/c$. Donc le produit scalaire des vecteurs OM' et $M'H'$ est, d'après 1.1), égal à :

$$\begin{aligned} p &= (1/\bar{z} + \alpha/c)(1/z) + (1/z + \bar{\alpha}/c)(1/\bar{z}) \\ &= 2/|z|^2 + (\alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z)/(c|z|^2) \end{aligned}$$

Or M et M' appartiennent à D donc $\alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z + 2c = 0$. D'où

$$p = 2/|z|^2 - 2/|z|^2 = 0$$

et donc OM' et $M'H'$ sont orthogonaux, c'est à dire $M' \in C'$.

On en déduit que l'image par f d'un cercle passant par O est la droite D orthogonale au diamètre OH' du cercle et qui passe par le point H tel que $OH \cdot OH' = 1$.

2.8) C est un cercle qui ne passe pas par O $\Leftrightarrow$ C a pour équation $|z|^2 - (\alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z) + c = 0$ avec $c \neq 0$. Soit $M'(z')$ l'image de $M(z) \in C$, on a $z' = 1/\bar{z}$ donc $z = 1/\bar{z}'$. En remplaçant z par $1/\bar{z}'$ dans l'équation du cercle, on obtient :

$$1/|z'|^2 - (\alpha/z + \bar{\alpha}/\bar{z}) + c = 0 \Leftrightarrow |z'|^2 - (\alpha\bar{z}' + \bar{\alpha}z') + 1/c = 0$$

qui est l'équation d'un cercle qui ne passe pas par O car $1/c \neq 0$