

deux 02,

CONCOURS D'ENTREE AU CYCLE D'INGENIEUR
DE L'ECOLE AFRICAINE DE LA METEOROLOGIE
ET DE L'AVIATION CIVILE

SESSION 2006

EPREUVE DE : MATHEMATIQUES

DUREE : 4 H

Exercice 1

Calculer l'intégrale triple $I = \iiint_D z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, où $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 - 2x \leq 0, z \geq 0\}$.

Exercice 2

En utilisant la méthode des résidus calculer l'intégrale suivante:

$$\int_0^\pi t g(x + i\alpha) dx, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3

α étant un nombre réel donné, t et x des variables réelles.

1° Déterminer la série de fourier de la fonction f définie par :

$$f(t) = \cos \alpha t \text{ si } -\pi < t < \pi.$$

Expliquer pourquoi la somme de la série est égale à $f(t)$ si $-\pi < t < \pi$ et déterminer la valeur de cette somme pour $t = \pi$. Déduire du résultat précédent que :

$$\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - k^2\pi^2}.$$

2° Montrer que si $|x| \leq M$ et si $N > \frac{M}{\pi}$, la fonction :

$$x \rightarrow \sum_N^{+\infty} \frac{1}{x^2 - k^2\pi^2}$$

est une fonction continue. Calculer : $\sum_1^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

3° Montrer que si $0 < x < \pi$: $\ln \sin x = \ln x + \sum_1^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$.

4° Montrer que si x n'est pas un multiple entier de π :

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x - k\pi)^2}.$$