

Exercice 1 Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ \frac{\text{Arc tan}(t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \end{cases}.$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et est paire.
2. Donner le développement limité à l'ordre 1 de $f(t)$ au voisinage de 0. En déduire que f est dérivable en 0, et calculer $f'(0)$.
3. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer $f'(t)$, pour $t \in \mathbb{R}^*$.
4. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^*$,

$$\int_0^t \frac{w^2}{(1+w^2)} dw = -\frac{1}{2} t^2 f'(t).$$
5. En déduire le sens de variation de f .

Exercice 2 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1. a. f est constante ;
 b. f n'est pas constante ;
 c. f s'annule ;
 d. f est périodique.

Exercice 3 Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau tel que : $\forall x \in A, x^2 = x$.

1. Montrer que $\forall x \in A, x + x = 0$.
2. Montrer que A est commutatif.
3. Montrer que $\forall x, y \in A, xy(x + y) = 0$.

Exercice 4 Soit A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = A + 2I_3$. En déduire que A est inversible et donner son inverse en fonction de A .