Mathématiques

Baccalauréat série D Session 2012

Exercice1

Une maîtresse a regroupé dans un tableau statistique les résultats d'une enquête portant sur le nombre de gâteaux consommés pendant la récréation par 200 élèves d'une maternelle.

Modalités	0	1	2	3	4
Effectifs	10			35	
Eff.Cum.Croissants	10		80	115	
Fréquences (%)		20		17,5	

1. Quelle est la nature du caractère étudié ?
2. Recopier et compléter le tableau ci-dessus.
3. Quel est le mode de cette série statistique ?
4. Calculer la moyenne, la variance et l'écart-type de la série étudiée.

Exercice 2

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $2z^2 - 2iz - 1 = 0$.
2. Le plan orienté étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. On considère les points A et B d'affixes respectives $\frac{-1+i}{2}$ et $\frac{1+i}{2}$.

   Démontrer que OAB est un triangle rectangle de sommet principal O.
3. On pose $Z = \frac{-1+i}{1+i}$.
   (a) Ecrire Z sous la forme trigonométrique.
   (b) En déduire les racines cubiques de Z sous la forme trigonométrique, puis sous la forme algébrique.

Problème

Partie A

Soit la fonction numérique f définie sur $]-1;0[$ par $f(x) = \ln(1-x^2) - x$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité graphique 10 cm).

1. Déterminer la limite de f à droite de -1.
   Donner une interprétation graphique du résultat obtenu.
2. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
3. Donner le coefficient directeur de la tangente (D) à (C) au point d'abscisse 0.
4. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]-0{,}72;-0{,}71[$ une unique solution α.
5. Tracer (D) et (C).
6. Tracer dans le même repère la courbe représentative de $x \longmapsto |f(x)|$.

Partie B

1. Vérifier l'égalité $\int_\alpha^0 \ln(1-x^2)dx = \int_\alpha^0 \ln(1+x)dx + \int_\alpha^0 \ln(1-x)dx$.
2. À l'aide des intégrations par parties, calculer en fonction de α, les intégrales suivantes :
   $I = \int_\alpha^0 \ln(1+x)dx$ et $J = \int_\alpha^0 \ln(1-x)dx$.
   (On pourra remarquer que $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{1+x}$ et $\frac{x}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x}$).
3. On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire exprimée en cm^2 de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe (C) et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 0$.
   Calculer $\mathcal{A}$ en fonction de α.

Partie C

On considère la suite (U) à termes positifs définie sur N^* par $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n}$ et $u_1 = 1$.

1. Calculer u_2 et u_3. Donner les résultats sous la forme 2^λ où λ est un réel.
2. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \ln u_n - 2\ln 2$.
   (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n.

(c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n et calculer la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.