Mathématiques

Baccalauréat série D Session 2014

Exercice 1

A) On considère le polynôme P défini par : $P(z) = z^3 - 3z^2 - 3z + 5 + 20i$, z étant un nombre complexe.

1. Montrer que $1 + 2i$ est une racine de P.
2. Trouver deux nombres complexes a et b tel que, pour tout nombre complexe z, on ait $P(z) = (z - 1 - 2i)(z^2 + az + b)$.
3. En déduire dans l'ensemble des nombres complexes, les solutions de l'équation $P(z) = 0$.

B) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$: on prendra $1\ cm$ pour unité graphique.

(a) Placer les points A, B et C d'affixes respectives $a = 1 + 2i$, $b = -2 - i$ et $c = 4 - i$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

(b) Soit D le point d'affixe $2 + 3i$; Montrer que A, B et D sont alignés.

(c) i. Calculer $\frac{b-a}{c-a}$, mettre le résultat sous la forme algébrique puis sous la forme trigonométrique.

ii. En déduire la nature exacte du triangle ABC.

Exercice 2

Une entreprise achète, utilise et vend des machines après un certain nombre x_i d'années. Après 6 années, l'évolution du prix de vente d'une machine en fonction du nombre d'années d'utilisation, se présente comme suit :

Nombre d'années x_i	1	2	3	4	5	6
Prix y_i en milliers de FCFA	150	125	90	75	50	45

1. Représenter graphiquement le nuage de points de cette série statistique. (On prendra $1\ cm$ pour une année en abscisses, et $1\ cm$ pour 20 000 FCFA en ordonnées).
2. Déterminer les coordonnées du point moyen G de la série (x_i, y_i) ainsi définie.

3. En utilisant la méthode des moindres carrés, déterminer une équation cartésienne de la droite de régression de y en x de cette série statistique.
4. En déduire une estimation du prix de vente d'une machine après 7 ans d'utilisation.

Problème

On considère la fonction numérique de la variable réelle x définie pour tout $x \neq -2$ par $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$. On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Partie A

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
2. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
3. Soit g la restriction de f dans l'intervalle $I =]-1; +\infty[$; montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera.
4. Tracer dans le même repère, la courbe (C) représentative de f, et la courbe (C') représentative de g^{-1}

Partie B

1. Déterminer l'image par f de l'intervalle $[0; 1]$.
2. Calculer $f''(x)$ et vérifier que pour tout x de $[0; 1]$, $f''(x) > 0$.
3. En déduire que pour tout x de $[0; 1]$, $\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{2}{3}$.
4. Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0; 1]$. (On ne demande pas de calculer α).

Partie C

On considère la suite (u_n) à termes positifs, définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel non nul n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer par récurrence sur n que la suite (u_n) est croissante et que $u_n \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$; quelle conclusion peut-on en tirer ?
2. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha|$.
3. En déduire que pour tout entier naturel n, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n).