Mathématiques

Baccalauréat série D & TI Session 2015

Exercice 1 :

On considère l'application t de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$t(z) = 9z^4 - 24z^3 + 50z^2 - 24z + 41$.

1. Montrer que si z_0 est une racine de t, alors $\overline{z_0}$ est aussi une racine de t.
2. Vérifier que i est une racine de t et en déduire une autre racine de t.
3. Déterminer trois nombres complexes a, b et c tels que $\forall z \in \mathbb{C}$,

   $t(z) = (z^2 + 1)(az^2 + bz + c)$.
4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $t(z) = 0$.
5. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{U}, \vec{V}\right)$ (unité graphique : $3cm$).

   On désigne par A, B, C et D les points d'affixes respectives $z_A = -i$, $z_B = i$, $z_C = \frac{4}{3} + \frac{5}{3}i$ et $z_D = \frac{4}{3} - \frac{5}{3}i$.

   a) Placer les points A, B, C et D.

   b) Montrer que $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} \in i\mathbb{R}$ et $\frac{z_C - z_B}{z_D - z_B} \in i\mathbb{R}$ où $i\mathbb{R}$ est l'ensemble des imaginaires purs.

   c) En déduire la nature exacte des triangles ACD et CBD.

   d) Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 2 :

Une urne contient 6 jetons rouges et 4 jetons jaunes. Un jeu consiste à tirer simultanément 2 jetons de l'urne. Si les jetons sont de même couleur, le joueur gagne $1000\ FCFA$. S'ils sont de couleurs différentes, alors le joueur perd $1000\ FCFA$.

1. a) Calculer la probabilité d'obtenir deux jetons de même couleur.

   b) Calculer la probabilité d'obtenir deux jetons de couleurs différentes.
2. On note X la variable aléatoire qui à chaque tirage de deux jetons associe le gain ou la perte du joueur.

   a) Donner les différentes valeurs possibles de X.

b) Déterminer la loi de probabilité de X.

c) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $V(X)$ de X.

Problème :

Partie A

On considère l'équation différentielle $y'' - 4y = 16x + 16 \quad (E)$.

1. Résoudre l'équation homogène (E') associée à (E): $y'' - 4y = 0$.
2. Déterminer les réels α et β tels que le polynôme $P(x) = \alpha x + \beta$ soit une solution particulière de (E).
3. Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - P$ est solution de (E').
4. En déduire toutes les solutions de (E).
5. Déterminer parmi ces solutions celle qui vérifie les conditions $f(0) = 4$ et $f'(0) = -4$.

Partie B

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{2x} + 3e^{-2x} - 4$.

1. Montrer que $g(x) = e^{-2x}(e^{4x} - 4e^{2x} + 3)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
2. Étudier le signe de $g(x)$.
3. On considère sur $\mathbb{R}$ la fonction h définie par : $h(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{3}{2}e^{-2x} - 4x$.
   a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$,
   $h(x) = e^{2x}\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}e^{-4x} - 4xe^{-2x}\right) = e^{-2x}\left(\frac{1}{2}e^{4x} - \frac{3}{2} - 4xe^{2x}\right)$.
   b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$.
   c) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = g(x)$.
   d) En déduire le tableau de variation de h.
   e) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une seule solution réelle α telle que $\alpha \in]1; 2[$.
   f) Construire la courbe représentative (C_h) de la fonction h dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'unité $3cm$ sur les axes.
4. Déterminer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe(C_h), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}\ln 3$.