Mathématiques

Baccalauréat série D Session 2011

Exercice 1

A la suite de plusieurs campagnes de vaccination réalisées dans un village du Cameroun, les étudiants ont révélé que la probabilité pour qu'un enfant de moins de 5 ans soit atteint de la poliomyélite est de 0,05. On choisit au hasard un enfant de moins de 5 ans de ce village.

1. Quelle est la probabilité pour que cet enfant ne soit pas atteint de poliomyélite ?
2. On a effectué un contrôle sur 8 enfants âgés de moins de 5 ans dans ce village.
   Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
   A : « aucun enfant n'est atteint de poliomyélite ».
   B : « trois enfants exactement sont atteints de poliomyélite ».
   C : « au moins quatre enfants sont atteints de poliomyélite ».

Exercice 2

Soit P un plan affine muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. À tout nombre complexe $z \neq -i$, on associe $f(z) = \frac{iz}{z+i}$. On note M le point d'affixe $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels.

1. Déterminer l'affixe z_0 du point B tel que $f(z_0) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$.
2. On note r le module de $z + i$ et α son argument principal.
   Écrire en fonction de r et α une forme trigonométrique de $f(z) - i$.
3. Soit A le point d'affixe $-i$.
   (a) Déterminer l'ensemble (C) des points M d'affixe z vérifiant l'égalité:
   $|f(z) - i| = 1$.
   (b) Montrer que la droite (T) d'équation $\sqrt{3}x - y - 3 = 0$ est tangente à (C) en B.
4. Construire A, B, (T) et (C).

Problème

On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = \frac{2x^2-3x}{x^2-3x+3}$; (Γ) sa courbe représentative dans un repère Orthonormé.

1. Donner le domaine de définition de f et les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers l'infini.
2. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x et dresser le tableau de variation de f.
3. Calculer $f(x) - 2$, en déduire la position de la courbe (Γ) par rapport à son asymptote horizontale.
4. Donner les équations des tangentes à la courbe (Γ) aux points d'abscisses respectives 0 et 2.
5. Tracer les tangentes précédentes et la courbe (Γ).
6. Montrer que la restriction g de f à $[3; +\infty[$ est une bijection de cet intervalle sur un intervalle J que l'on déterminera.

   Tracer dans le repère la courbe représentative de g^{-1}.
7. Soit λ un nombre réel strictement supérieur à 3. On appelle $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (Γ) et la droite d'équation $y = 2$ d'une part, les droites d'équations $x = 3$ et $x = \lambda$ d'autre part.

   (a) Montrer que $\mathcal{A}(\lambda) = \int_3^\lambda \frac{3x-6}{x^2-3x+3} dx$.

   (b) Montrer que pour tout $x \geq 3$, on a : $2x - 3 \leq 3x - 6$.

   En déduire que $\int_3^\lambda \frac{2x-3}{x^2-3x+3} dx \leq \mathcal{A}(\lambda)$.

   (c) Quelle est la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$?
8. On considère la suite (u_n) définie par : u_0 réel donné pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

   (a) Pour $u_0 = 2$, montrer que la suite est constante.

   (b) On donne u_0 tel que $2 < u_0 < 3$.

   - Montrer que pour tout n, on a: $2 < u_n < 3$.
   - Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   - Que peut-on déduire sur la suite (u_n) ?