Mathématiques

Baccalauréat série D Session 2010

Exercice 1

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. (Unité sur les axes : $1\ cm$). On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation

(e) : $z^2 + (-7 + i)z + 12 - 16i = 0$.

1. (a) Calculer $(5 + 5i)^2$.

   (b) Résoudre l'équation (e) dans $\mathbb{C}$.

2. Soient les points A et B d'affixes respectives $1 - 3i$ et $6 + 2i$.

   Calculer $\frac{z_O - z_B}{z_O - z_A}$ où z_O, z_A et z_B désignent respectivement les affixes des points O, A et B.

   En déduire la nature du triangle AOB.

3. Que représente le point I d'affixe $\frac{7}{2} - \frac{1}{2}i$ pour le segment [AB] ?

4. Soient (Γ) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\left|z - \frac{7}{2} + \frac{1}{2}i\right| = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

   (a) Dire si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse.

   $\alpha)$ $O \in (\Gamma)$; $\beta)$ $A \in (\Gamma)$; $\gamma)$ $B \in (\Gamma)$.

   (b)Donner une équation cartésienne de (Γ) et construire (Γ).

Exercice 2

En 1990, un pays avait une population de 50 millions d'habitants. Par accroissement naturel, sa population augmente de 1,5% par an. Par ailleurs, on constate une augmentation annuelle supplémentaire de 0,45 million d'habitants dès l'année 1991. L'unité étant le million d'habitants ; on note $U_0 = 50$ l'effectif de la population en 1990 et U_n le nombre d'habitants en (1990+n).

1. (a) Calculer U_1 et U_2.

   (b) Montrer que $U_{n+1} = 1{,}015U_n + 0{,}45$.

2. On se propose de prévoir directement l'effectif de la population en 2010 si le modèle d'évolution se poursuit de la même façon ; pour cela, on considère la suite (V_n) définie par $V_n = 30 + U_n$.
   (a) Calculer V_1 et V_2.
   (b) Démontrer que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   (c) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n. En déduire alors l'effectif de la population de ce pays en l'an 2010. (On prendra le résultat arrondi en million d'habitants).
   (d) Déterminer par calcul à partir de quelle année l'effectif de la population de ce pays dépassera 100 millions d'habitants si l'évolution se poursuit de la même manière.

Problème

Partie A

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 1 + xe^{-\frac{x}{2}} & si \;\; x \leq 0 \\ x \ln x - x + 1 & si \;\; x > 0 \end{cases}$.

Soient $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé du plan et (C_f) la courbe représentative de f dans ce repère.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. (a) Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
   (a) Écrire les équations des demi-tangentes à (C_f) au point d'abscisse 0.
3. (a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
   (b) Etudier les branches infinies de la courbe (C_f).
4. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
5. Tracer les demi-tangentes à (C_f) au point d'abscisse 0 et tracer (C_f).
6. Déterminer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f) et les droites d'équations respectives $y = 1$, $x = -1$ et $x = 0$ (On pourra utiliser une intégration par parties).
7. Montrer que la restriction g de f à $]-\infty; 0[$ est une bijection de l'intervalle $]-\infty; 0[$ dans un intervalle que l'on précisera.

Partie B

On se propose de résoudre l'équation différentielle (1) : $y' - 2y = xe^{-\frac{x}{2}}$.

1. Résoudre l'équation (2) : $y' - 2y = 0$ où y désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Soient a et b deux réels, u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (ax + b)e^{-\frac{x}{2}}$.

Déterminer a et b pour que u soit une solution de (1).

3. (a) Montrer que v est solution de (1) si et seulement si $v - u$ est solution de (2).

   (b) En déduire les solutions de (1).

   (c) Déterminer la solution de (1) qui s'annule en 0.