Mathématiques

Baccalauréat série D Session 2009

Exercice 1

On considère la fonction polynôme P à variable complexe définie par

$P(z) = z^3 - (6+6i)z^2 + 21iz + 15 - 5i$.

1. Calculer $P(i)$.
2. En déduire que $P(z) = (z-i)(az^2 + bz + c)$ où a, b et c sont des nombres complexes que l'on déterminera.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (6+5i)z + 5 + 15i = 0$; en déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$.
4. A, B et C sont des points du plan complexe d'affixes respectives $\alpha = i$; $\beta = 3 + i$ et $\gamma = 3 + 4i$.

   (a) Calculer le rapport $\frac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}$.

   (b) Quelle est la nature du triangle ABC ?

   (c) Donner l'angle de la rotation r de centre B qui transforme A en C.

Exercice 2 : Le tableau ci-dessous représente la population X des pays de la zone CEMAC et le nombre Y d'analphabètes de chacun de ces pays (tous exprimés en millions d'habitants).

Pays	Cameroun	RCA	Congo	Gabon	Guinée Équatoriale	Tchad
Population	13,9	3,4	2,7	1,15	0,42	7,153
Nombre d'analphabètes	3,9337	1,9584	1,43	0,38	0,08	3,43

(a) Représenter, dans le plan par rapport à un repère orienté $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ le nuage de points associé à cette série statistique (on prendra en abscisses 1 cm et en ordonnées 4 cm pour un million d'habitants).

(b) Déterminer en utilisant la méthode de Mayer une équation cartésienne de la droite d'ajustement affine de ce nuage de points.

(c) Donner une estimation du nombre d'analphabètes qu'aura le Tchad lorsque la population de ce pays atteindra 10,2 millions d'habitants.

Problème :

Le problème comporte trois parties A, B et C obligatoires.

Partie A : On considère la fonction numérique f et sa courbe (C) dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, définie par $f(x) = (2\,x + 1)e^{-x} + 1$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.
3. Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion I que l'on déterminera.
4. Tracer (C).

Partie B : On considère les équations différentielles (E) et (E') suivantes :

$$(E): 3y'' + 2y' - y = -8e^{-x} - 1 \;;\; (E'):\; 3y'' + 2y' - y = 0.$$

1. Vérifier que f est solution de (E).
   (f est la fonction définie dans la partie A).
2. Montrer qu'une fonction g est solution de (E) si et seulement si $g - f$ est solution de (E').
3. Résoudre alors l'équation (E') et en déduire les solutions de (E).

Partie B : F est la fonction numérique définie par : $F(x) = (ax + b)e^{-x} + x$.

1. Déterminer a et b pour que F soit une primitive de f, où f est la fonction définie dans la partie A.
2. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur à 1 par :
   $u_n = \int_2^n [f(x) - 1]dx.$
   (a) Calculer u_2 et u_4 .
   (b) Donner une interprétation géométrique de u_n et donner son expression en fonction de n.
   (c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.